Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 2015

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 695 ($WT = 1{,}77$) i 696 ($WT = 2{,}86$) z numeru 2/2015

Janusz Olszewski	Warszawa	44,85
Wojciech Tobiś	Praszka	44,21
Marek Spychała	Warszawa	42,75
Łukasz Garncarek	Opole	37,98
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	37,05
Krzysztof Maziarz	Kraków	35,37
Jędrzej Garnek	Poznań	34,89
Paweł Najman	Kraków	33,64

Janusz Olszewski – nazwisko może znane uczestnikom *ligi* i czytelnikom *Delty*? To po raz *szesnasty*, jakby co. Nowy zaś w szeregach Klubu 44 M: Wojciech Tobiś – to już numer 126.

Zadania z matematyki nr 705, 706

Redaguje Marcin E. KUCZMA

705. Niech A_0 będzie ustalonym wierzchołkiem $(n+1)$-kąta foremnego. Numerujemy pozostałe wierzchołki $A_1, \ldots, A_n$ w dowolnej kolejności. Każdemu bokowi A_iA_j przyporządkowujemy liczbę $|i-j|$. Niech S będzie sumą $n+1$ liczb, przyporządkowanych wszystkim bokom. Dla zadanej liczby naturalnej n:

(a) Obliczyć najmniejszą osiągalną wartość sumy S.
(b) Wyjaśnić, ile jest sposobów ponumerowania n wierzchołków (poza A_0), przy których S osiąga ową minimalną wartość.

706. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 1$, dla których istnieje wielomian W stopnia n, o współczynnikach całkowitych, ze współczynnikiem wiodącym równym 1, i taki, że równanie $W(x)^2 = 1$ ma $2n$ pierwiastków całkowitych (niekoniecznie różnych).

Zadanie 706 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/2015

Przypominamy treść zadań:

701. Niech n będzie ustaloną dodatnią liczbą nieparzystą. Wyznaczyć największą możliwą liczność zbioru złożonego z liczb całkowitych dodatnich, mniejszych od $3n$, w którym każde dwa różne elementy mają i różnicę, i sumę różną od n.

702. Niech $F_n(t) = t^n + (t+1)^n$. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych $n \geqslant 1$, dla których równanie $F_{2n}(x) = F_n(y)$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych $x, y \geqslant 1$.

701. Liczba n jest nieparzysta, zatem zbiór wszystkich liczb parzystych, mniejszych od $3n$, ma własność, o którą chodzi. Jest ich $(3n-1)/2$. Wykażemy, że jest to największa możliwa liczność.

Rozbijamy zbiór $\{1, \ldots, 3n-1\}$ na rozłączne pary:

$$\{1\,,\, n-1\}, \quad \{2\,,\, n-2\}, \quad \ldots\,, \quad \{(n-1)/2\,,\, (n+1)/2\},$$
$$\{n\,,\, 2n\}, \quad \{n+1\,,\, 2n+1\}, \quad \ldots\,, \quad \{n+(n-1)\,,\, 2n+(n-1)\}.$$

W górnym rządku mamy $(n-1)/2$ par, w dolnym n par; razem $(3n-1)/2$ par. Zbiór o większej liczności (zawarty w $\{1, \ldots, 3n-1\}$) musi zawierać jedną z wymienionych par. Ale w każdej parze albo suma, albo różnica elementów jest równa n. Stąd nasza teza.

702. Pokażemy, że gdy p jest nieparzystą liczbą pierwszą, równanie $F_{2p}(x) = F_p(y)$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich.

Przypuśćmy, że para liczb całkowitych $x, y \geqslant 1$ jest rozwiązaniem. Zgodnie z małym twierdzeniem Fermata,

$$F_{2p}(x) = x^{2p} + (x+1)^{2p} \equiv x^2 + (x+1)^2 \pmod{p},$$
$$F_p(y) = y^p + (y+1)^p \equiv y + (y+1) \pmod{p}.$$

Jeśli więc $F_{2p}(x) = F_p(y)$, to $2x^2 + 2x \equiv 2y$, czyli $x^2 + x \equiv y \pmod{p}$.

Z wypukłości funkcji $t \mapsto t^p$ (w zbiorze liczb dodatnich) wynika nierówność

$$F_p(y) = F_{2p}(x) = \big(x^2\big)^p + \big(x^2+2x+1\big)^p > \big(x^2+x\big)^p + \big(x^2+x+1\big)^p = F_p(x^2+x).$$

Funkcja F_p jest rosnąca; stąd $y > x^2 + x$. Skoro zaś $x^2 + x \equiv y \pmod{p}$, widzimy, że $y \geqslant x^2 + x + p$. A zatem $F_p(y) \geqslant F_p(x^2+x+p)$. Aby uzyskać oczekiwaną sprzeczność, wystarczy wykazać, że

$$(1) \qquad F_p(x^2+x+p) > F_{2p}(x).$$

Oznaczmy: $x + \frac{1}{2} = z$; wtedy $x^2 + x = z^2 - \frac{1}{4} > z^2 - \frac{1}{2}$. Ponownie korzystając z wypukłości funkcji t^p, mamy nierówność $F_p(t) > 2\big(t + \frac{1}{2}\big)^p$. Wobec tego

$$(2) \qquad F_p(x^2+x+p) > F_p\left(z^2 - \frac{1}{2} + p\right) > 2\left(z^2+p\right)^p = 2\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} z^{2p-2k}p^k.$$

Z drugiej strony,

$$(3) \qquad F_{2p}(x) = \left(z - \frac{1}{2}\right)^{2p} + \left(z + \frac{1}{2}\right)^{2p} = 2\sum_{k=0}^{p}\binom{2p}{2k} z^{2p-2k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}.$$

Nierówność (1) będzie udowodniona, jeśli pokażemy, że w wyrażeniu po prawej stronie (2) współczynnik stojący przy z^{2p-2k} jest nie mniejszy niż analogiczny współczynnik w wyrażeniu (3); czyli, że

$$(4) \qquad a_k := (4p)^k \binom{p}{k}\binom{2p}{2k}^{-1} \geqslant 1 \quad \text{dla } k = 0, \ldots, p.$$

Łatwo przerachować, że

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{4p\,(2k+1)}{2p-2k-1} > \frac{4p}{2p} > 1.$$

Stąd $1 = a_0 < a_1 < \ldots < a_p$; oszacowanie (4) gotowe, dowód zakończony.

Przypominamy komentarz, towarzyszący treści zadania (prop. Piotr Kumor): jest to kontynuacja dawnego zadania 194 (prop. Marcin Mazur) z tezą: dla $n \geqslant 2$ badane równanie ma w liczbach całkowitych co najwyżej skończenie wiele rozwiązań – oraz zasygnalizowanym problemem: czy to równanie w ogóle ma rozwiązania poza trywialnymi ($|x|, |y| \leqslant 1$)?