LXVI Olimpiada Matematyczna

W LXVI Olimpiadzie Matematycznej uczestniczyło 895 uczniów, więc aż o 272 osoby mniej niż rok wcześniej, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 409 uczniów, a do zawodów stopnia trzeciego – 126 uczniów. Wiele osób, w tym niżej podpisany, uznało, że zadania domowe były za trudne i nie zachęcały uczniów spoza szkół o dużych tradycjach olimpijskich (a raczej uczniów nauczycieli, którzy uczą matematyki, a nie tylko przygotowują do zdania matury) do startowania w tych zawodach.

Niektóre okręgi obniżyły zwyczajowe progi dopuszczenia do zawodów drugiego stopnia, ale i tak zakwalifikowano do nich o 98 osób mniej niż rok wcześniej. Komisja zadaniowa OM starała się wziąć pod uwagę te czynniki. Jako członek tego gremium uznaję, że zadania na zawody drugiego i trzeciego stopnia nie były za trudne.

Liczby zadań ocenionych na 6 lub 5 punktów w drugim stopniu: pierwsze – 330, drugie – 112, trzecie – 154, czwarte – 217, piąte – 141 i szóste – 30.

Liczby zadań finałowych ocenionych na 6 lub 5 punktów: pierwsze – 100, drugie – 33, trzecie – 21, czwarte – 50, piąte – 19, a szóste – 26.

Do finału dopuściliśmy tych uczniów, którzy uzyskali co najmniej 19 punktów, co oznacza rozwiązanie 3,5 zadania (np. $2 \cdot 6 + 5 + 2$). Obniżenie progu do 18 punktów oznaczałoby dopuszczenie dodatkowych 22 osób do finału.

Zadania finałowe dobrze rozróżniły czołówkę: tym razem ustalając składy reprezentacji Polski na Olimpiadę Międzynarodową i inne zawody, nie musieliśmy korzystać z wyników zawodów okręgowych. Tylko 9 finalistów (około 7%) nie rozwiązało żadnego zadania (w drugim stopniu było to 30 osób (około 7,4%)).

Najtrudniejsze z zadań finałowych było zadanie piąte, z planimetrii, choć spodziewaliśmy się, że będzie nim zadanie trzecie, z kombinatoryki. Co więcej, w czasie omawiania rozwiązań tuż po zawodach dwóch byłych olimpijczyków przedstawiło swe rozwiązania tego zadania wykorzystujące wiele twierdzeń, często nieznanych większości słuchających.

Oto treść zadania: *Dowieść, że przekątne wypukłego czworokąta są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy wewnątrz tego czworokąta znajduje się punkt, którego rzuty prostokątne na boki czworokąta są wierzchołkami prostokąta.*

Podam jego „antygeometryczne” rozwiązanie. Drobne luki Czytelnicy wypełnią, jeśli zechcą, sami.

Załóżmy, że rzuty punktu P na boki czworokąta $ABCD$ tworzą prostokąt i obierzmy układ współrzędnych tak, by $P = (0, 0)$ był jego początkiem, a osie były równoległe, odpowiednio, do boków prostokąta. Niech rzutem P na AB będzie punkt $Q = (a, b)$, na bok BC – punkt $R = (c, b)$, na bok CD – punkt $S = (c, d)$ a na bok DA – punkt $T = (a, d)$, przy czym $a, b > 0 > c, d$. Prosta AB jest prostopadła do wektora (a, b), więc ma równanie $ax + by = a^2 + b^2$. Podobnie równaniami prostych BC, CD i DA są odpowiednio $cx + by = c^2 + b^2$, $cx + dy = c^2 + d^2$ i $ax + dy = a^2 + d^2$.

Proste $ax + by = a^2 + b^2$ i $cx + by = c^2 + b^2$ przecinają się w punkcie $\left(a + c, \frac{b^2-ac}{b}\right)$, więc $B = \left(a + c, \frac{b^2-ac}{b}\right)$. Podobnie $C = \left(\frac{c^2-bd}{c}, b + d\right)$, $D = \left(a + c, \frac{d^2-ac}{d}\right)$ i $A = \left(\frac{a^2-bd}{a}, b + d\right)$. Prosta AC jest równoległa do osi OX, a prosta BD – do osi OY, więc przekątne prostokąta $ABCD$ są prostopadłe.

Z kolei gdy czworokąt $ABCD$ ma prostopadłe przekątne, możemy umieścić go tak, by miał wierzchołki na osiach: $A = (a, 0)$, $B = (0, b)$, $C = (c, 0)$ i $D = (0, d)$. Z już udowodnionego wiemy, że jeśli rzuty pewnego punktu tworzą prostokąt, ma on boki równoległe do osi. Równaniem prostej AB jest $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, bo spełniają je współrzędne punktów A i B. Analogicznie równaniami prostych BC, CD i DA są odpowiednio $\frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1$, $\frac{x}{c} + \frac{y}{d} = 1$ i $\frac{x}{a} + \frac{y}{d} = 1$. Niech $Q_t = \left(t, b\left(1 - \frac{t}{a}\right)\right)$, $R_t = \left(\frac{ct}{a}, b\left(1 - \frac{t}{a}\right)\right)$, $S_t = \left(\frac{ct}{a}, d\left(1 - \frac{t}{a}\right)\right)$, $T_t = \left(t, d\left(1 - \frac{t}{a}\right)\right)$ – wyliczone zostały kolejno współrzędne tych punktów w zależności od pierwszej współrzędnej punktu Q_t oznaczonej literą t tak, by punkt Q_t leżał na prostej AB, punkt R_t – na BC, punkt S_t – na BC, punkt T_t – na DA. Znajdziemy taki punkt $P_d = (p, q)$, że odcinek P_dQ_t będzie prostopadły do prostej AB, a odcinek P_dR_t – prostopadły do prostej BC. Spełnione mają być równości $(p - t) \cdot \frac{1}{b} - \left(q - b + \frac{bt}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} = 0$ oraz $\left(p - \frac{ct}{a}\right) \cdot \frac{1}{b} - \left(q - b + \frac{bt}{a}\right) \cdot \frac{1}{c} = 0$. Wynika z nich, że $p = t\frac{c+a}{a}$ i $q = b + t\frac{ac-b^2}{ab}$. W taki sam sposób znajdujemy taki punkt $P_g = (\tilde{p}, \tilde{q})$, że $P_gT_t \perp AD$ i $P_gS_t \perp AD$: $\tilde{p} = t\frac{c+a}{a} = p$ i $\tilde{q} = d + t\frac{ac-d^2}{ad}$. Obliczymy t z równania $q = \tilde{q}$:

$$d - b = t\frac{(ac-b^2)d-(ac-d^2)d}{abd} = t\frac{(ac+bd)(d-b)}{abd},$$

zatem $t = \frac{abd}{ac+bd}$. Dla tego t otrzymujemy

$$P := P_d = P_g = \left(\frac{bd(a+c)}{ac+bd}, \frac{ac(b+d)}{ac+bd}\right).$$

Rzutami punktu P na proste AB, BC, CD i DA są punkty $Q := Q_t = \left(\frac{abd}{ac+bd}, \frac{abc}{ac+bd}\right)$, $R := R_t = \left(\frac{bcd}{ac+bd}, \frac{abc}{ac+bd}\right)$, $S := S_t = \left(\frac{bcd}{ac+bd}, \frac{acd}{ac+bd}\right)$, $T := T_t = \left(\frac{abd}{ac+bd}, \frac{acd}{ac+bd}\right)$.

Czysto geometryczne rozwiązanie można obejrzeć na stronie http://www.om.edu.pl/sites/default/files/zadania/om/om66_3r.pdf.

Jedyną trudnością w tym rozwiązaniu jest wybranie „dobrego” układu współrzędnych.

Michał KRYCH