Klub 44

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 693 ($WT = 1{,}72$) i 694 ($WT = 2{,}95$) z numeru 1/2015

Marek Spychała	Warszawa	42,75
Wojciech Tobiś	Praszka	42,44
Janusz Olszewski	Warszawa	40,50
Łukasz Garncarek	Opole	37,98
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	37,05
Krzysztof Maziarz	Kraków	35,37
Paweł Najman	Kraków	33,64
Jędrzej Garnek	Poznań	33,12

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2015

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

699. Cztery różne punkty na płaszczyźnie wyznaczają sześć odcinków. Załóżmy, że trzy spośród tych odcinków mają jednakową długość a, zaś pozostałe trzy mają jednakową długość b, przy czym $a < b$. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości stosunku b/a.

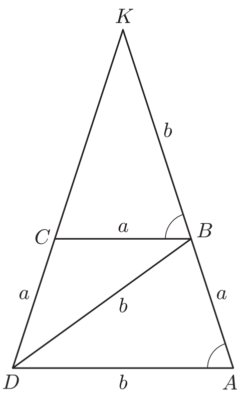
700. Czy dla każdej funkcji $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, spełniającej warunek $g(1) = 1$, istnieje funkcja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, spełniająca warunki $f(n) \geqslant g(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $f(mn) = f(m)f(n)$ dla każdej pary liczb względnie pierwszych $m, n \in \mathbb{N}$? ($\mathbb{N}$ to zbiór wszystkich liczb całkowitych dodatnich).

699. Jeżeli trzy odcinki jednakowej długości tworzą trójkąt, to pozostałe trzy odcinki (też jednakowej długości) spotykają się w pozostałym z czterech danych punktów, który wobec tego musi być środkiem owego trójkąta równobocznego. W tym przypadku $b/a = \sqrt{3}$, i jest to jedna z możliwych wartości rozpatrywanego stosunku. Dalej przyjmijmy, że nie pojawia się trójkąt równoboczny. Trzy odcinki długości a tworzą wówczas łamaną (nie zamkniętą), i tak samo trzy odcinki długości b. Można tak ustalić oznaczenia A, B, C, D danych punktów, by

$$|AB| = |BC| = |CD| = a, \qquad |BD| = |DA| = |AC| = b.$$

W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AC jest dłuższa niż ramiona. W trójkącie równoramiennym ABD podstawa AB jest krótsza niż ramiona. Zatem $|\sphericalangle BAC| < 60^\circ < |\sphericalangle BAD|$.

Odcinek AD jest wspólnym bokiem przystających trójkątów równoramiennych ABD oraz ACD (o podstawach AB, CD). Te trójkąty muszą być położone symetrycznie – albo względem środka odcinka AD, albo względem symetralnej tego odcinka. W pierwszym z tych przypadków powstałby równoległobok $ABDC$; to jednak nie jest możliwe, skoro kąt BAC jest mniejszy od kąta BAD.



W drugim przypadku tworzy się trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach AD (dłuższej) i BC (krótszej). Półproste $AB^{\rightarrow}$ i $DC^{\rightarrow}$ przecinają się w punkcie, który nazwiemy K. Trójkąty równoramienne ADB i BKC mają równe podstawy ($|AB| = |BC| = a$) i równe kąty przy podstawie ($|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CBK|$) – są więc przystające. Stąd $|BK| = |AD| = b$. Trójkąt BKC jest ponadto podobny do AKD. Otrzymujemy proporcję

$$\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|AK|}{|BK|}, \quad \text{czyli} \quad \frac{b}{a} = \frac{a+b}{b}.$$

Stosunek $\lambda = b/a$ spełnia zatem równanie $\lambda = \lambda^{-1} + 1$, którego jedynym dodatnim pierwiastkiem jest $\lambda = (1 + \sqrt{5}\,)/2$. Realizację tej wartości uzyskujemy, biorąc jako A, B, C, D cztery wierzchołki pięciokąta foremnego.

Stąd odpowiedź: możliwymi wartościami stosunku b/a są liczby $\sqrt{3}$ oraz $(1 + \sqrt{5}\,)/2$.

700. Tak, dla każdej funkcji g łatwo wskazać funkcję f o wymaganych własnościach. Niech (a_k) będzie rosnącym ciągiem wszystkich potęg liczb pierwszych:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 16, \ldots) = (2, 3, 2^2, 5, \ldots).$$

Funkcja f (o własności $f(mn) = f(m)f(n)$ gdy $\mathrm{nwd}(m, n) = 1$) jest wyznaczona przez ciąg wartości $f(a_k)$; zaś podany warunek multyplikatywności nie stawia na owe wartości żadnych ograniczeń. Wobec tego konstruujemy taki ciąg indukcyjnie. Niech $f(a_1)$ będzie dowolną liczbą naturalną większą od $g(a_1)$.

Załóżmy, że liczby $f(a_1)$, …, $f(a_{k-1})$ zostały już określone. Patrzymy na zbiór wszystkich liczb postaci $g(s)$, gdzie s jest iloczynem różnych liczb ze zbioru $\{a_1, \ldots, a_k\}$. Określamy $f(a_k)$ jako dowolną liczbę naturalną większą od wszystkich takich liczb $g(s)$.

Wybrany ciąg wartości $f(a_k)$, wraz z warunkiem multyplikatywności, jednoznacznie generuje funkcję $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Spełnia ona także pozostały z zadanych warunków; jeśli bowiem liczba $n \in \mathbb{N}$ zostanie zapisana jako iloczyn $n = a_{i_1} \ldots a_{i_r}$, gdzie $i_1 < \ldots < i_r$, wówczas

$$f(n) = f(a_{i_1}) \ldots f(a_{i_r}) \geqslant f(a_{i_r}) > g(a_{i_1} \ldots a_{i_r}) = g(n).$$

Rozwiązanie zadania F 886.
Okres wahadła $T = N/f$, a stąd jego długość $L = gN^2/4\pi^2 f^2 \approx 1$ m. Długość obrazu wahadła jest więc znacznie mniejsza od jego długości rzeczywistej ($L' \ll L$). Oznacza to, że poszukiwana odległość D od kamery do wahadła wielokrotnie przewyższa ogniskową obiektywu ($D \gg F$). Stąd z kolei wynika, że obraz wahadła znajduje się bardzo blisko ogniska obiektywu, a więc odległość od obiektywu do kliszy, na której powstaje obraz, jest w przybliżeniu równa F. Stąd wynika, że $L/D \approx L'/F$, czyli

$$D \approx FL/L' = FgN^2/4\pi^2 f^2 L' \approx 7 \text{ m}.$$