Rozprawka o metodzie

Marek KORDOS

Na początek stwierdzenie: *w nauce, a zwłaszcza w matematyce, zajmujemy się tylko wyjątkowymi, wyidealizowanymi sytuacjami.*

A może lepiej zacząć tak: *do tego, o co nam chodzi, co nas interesuje, dorobiliśmy sobie taki świat, taką całość, że to, od czego zaczęliśmy, stało się wyjątkowe.*

Ponieważ może się to wydawać mętne i wątpliwe, więc przyjrzyjmy się przykładom.

Przykład I. Liczby będące wynikiem pomiarów wszystkie są wymierne, a więc wyjątkowe, zaniedbywalne wśród – uważanych przez nas za zwyczajne – liczb rzeczywistych.

Przykład II. Na powierzchnie patrzymy tak, że wydają się nam niesłychanie regularne. Tak doskonałe, by można było stwierdzić, że

- (Jacob Bernoulli) krzywizna normalna powierzchni ma dwa ekstrema i to w kierunkach prostopadłych;
- (Leonhard Euler) krzywiznę każdej krzywej normalnej opisuje równość $\kappa_N = \kappa_{\max} \sin^2 \alpha + \kappa_{\min} \cos^2 \alpha$, gdzie kąt α mierzymy od kierunku minimalnej krzywizny.
- (Jean Meusnier) krzywiznę dowolnej krzywej na powierzchni opisuje równość $\kappa = \frac{\kappa_N}{\sin \theta}$, gdzie krzywa normalna i dana mają wspólną styczną, a θ to kąt między płaszczyzną ściśle styczną do krzywej i płaszczyzną styczną do powierzchni.

Przykład III. Nawet geometrię obraliśmy tak,

- by w niej grupy izometrii, podobieństw i przekształceń afinicznych to były trzy różne grupy;
- by wśród geometrii riemannowskich o stałej krzywiźnie stanowiła ona wspólny brzeg bogactwa geometrii hiperbolicznych i eliptycznych;
- co więcej: by jedynie nasza (szkolna, euklidesowa) płaszczyzna – spośród wszystkich jednorodnych geometrii o wymiarze większym od 1 – nie dopuszczała paradoksalnego rozkładu, czyli by jej grupa izometrii nie miała podgrup wolnych.

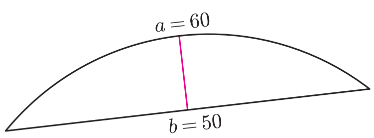
Zamiast mnożyć przykłady postawmy pytanie: czy możliwa jest matematyka nietraktująca rzeczywistych sytuacji za wyjątki, czyli niedolepiająca do tego, co naprawdę jest, absurdalnych dodatków w rodzaju liczb przestępnych, ciągłych funkcji [0, 1] na [0, 1] w żadnym przedziale niemonotonicznych, paradoksalnych rozkładów czy indukcji pozaskończonej itp.?

Od 40 lat lansowany jest pogląd, by nie nazywać tego zajmowania się liczbami i figurami matematyką – ale o tym dalej.

A odpowiedź jest TAK. Co więcej, większość czasu, w którym ludzie zajmowali się liczbami i figurami, wypełniona była taką matematyką.

Cofnijmy się więc o 5000 lat

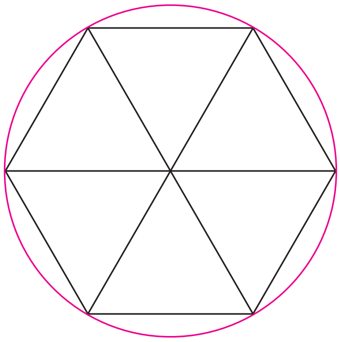
Tabliczka sumeryjska (babilońska) *British Museum 85 194* prezentuje nam dydaktyczny dialog między uczniem a nauczycielem.



Rys. 1

Problem: *Odcinek kołowy. Brzeg 60, cięciwa 50. Jakie pole?*
Nauczyciel: *60, brzeg, o ile wychodzi poza 50?*
Uczeń: *O 10 wychodzi.*
N: *50 pomnóż przez 10.*
U: *500, jak widzisz.*
N: *10 (linię dzielącą) podnieś do kwadratu.*
U: *100, jak widzisz.*
N: *100 od 500 jest oddalone...*
U: *450, jak widzisz, jest pole!*

Jak widać, pole odcinka kołowego obliczamy ze wzoru $(a - b)b - \frac{1}{2}(a - b)^2$.



Rys. 2. Obwód sześciokąta foremnego to $6r$, a okrąg nie jest od niego istotnie dłuższy.

Niby dziwne, ale…

1° Oczywiście, $\pi = 3$ – uzasadnienie na marginesie (patrz również, na przykład, Księga I Królewska, **7** 23) – zresztą, gdy się zastanowimy, okaże się, że nasze 3,14 to też przecież przybliżenie.

2° Dla półkola mamy $a = \pi r = 3r$, $b = 2r$ i linia dzieląca faktycznie równa się $a - b = r$. Obliczenie zatem jest poprawne:

$$(a-b)b - \tfrac{1}{2}(a-b)^2 = r \cdot 2r - \tfrac{1}{2}r^2 = \tfrac{3}{2}r^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 3r^2 = \tfrac{1}{2}\pi r^2.$$

3° Jeśli wzór jest dobry dla półkola, to i w innych przypadkach da rozsądne wyniki.

Przytoczony bieg myśli charakteryzuje najstarszy ze sposobów porządkowania wiedzy o świecie, znany jako metodologia empiryczna.

Narzędziami są analogia, powtarzające się następstwo czasowe. Brak natomiast niezbędnego dziś dla nas elementu: związku przyczynowego.

Z tego wynika **sposób notowania:** jest to mit, fabuła.

Wdrażanie, praktyczne spożytkowanie to algorytm powstały w wyniku testowania tzw. metodą prób i błędów, realizowany w postaci ceremoniału (stąd nazywanie uczonych tych czasów kapłanami).

Przyjrzyjmy się praźródłom takiego porządkowania rzeczywistości.

Można tu cofnąć się jeszcze przed zaistnienie ludzkości. W połowie sierpnia na nadbiebrzańskich łąkach tysiące bocianów, zgodnie, pod kierunkiem swego przywódcy, zbierają się do liczącej wiele tysięcy kilometrów podróży, **bo tak trzeba**.

Pierwsze człowiecze porządkowanie świata powoduje, że dziecko, wieczorem kładąc się spać, **wie**, że gdy się obudzi, znów będzie jasno.

Takie jest zresztą i faktyczne postrzeganie świata: *…przede mną gasisz w lazurowej wodzie gwiazdę ognistą* – i tak my wraz z poetą widzimy nadmorskie zachody Słońca.

Dlatego nie powinny nas dziwić odnotowania tego porządku w mitach.

Patrz np. Homer, *Odyseja* V.125-128; Arystofanes, *Żaby*, 338, Hezjod, *Teogonia*, 969 i dalej.

Pory roku zostały odnotowane jako sześć pestek granatu zjedzonych przez Persefonę.

Patrz np. Opowieści z 1000 i jednej nocy: *Opowieści Sindbada Żeglarza, podróż I*; Księga Rodzaju, **30** 31–43; Claude Lévi-Strauss, *Smutek tropików*.

Pojawianie się na świecie potomstwa (o tak oczywistych dla nas przyczynach) długo relacjonowano jako spowodowane przez wolę sił wyższych, wiatr zachodni, konia morskiego itp.

Patrz np. Księga Papugi: *25 opowieści wampira*.

Konieczność usuwania zwłok powodowały wampiry, duchy, demony (to samo pod nazwą kiedyś mikrobów, a dziś bakterii i wirusów opowiadają nam higieniści).

Nie każdy zdaje sobie sprawę, jak blisko mamy przykład współczesny:

złóż takie ofiary

1 szklanka masła	*2 łyżeczki wanilii*
1 szklanka białego cukru	*2 rozmieszane jajka*
1 szklanka brązowego cukru	*2,5 szklanki mąki (nieprzesianej)*
2 łyżeczki sody	*2 szklanki pokruszonych płatków kukurydzianych*
1 łyżeczka soli	*1 lub 2 szklanki wiórków czekoladowych*

przestrzegaj takiego rytuału

Stop masło, dodaj obie szklanki cukru i wymieszaj. Dodaj sodę, sól, wanilię i jajka. Dokładnie wymieszaj. Następnie dodaj mąkę, cały czas mieszając. Dodaj pokruszone płatki i wiórki czekoladowe. Całość dokładnie wymieszaj.

Z ciasta palcami uformuj kulki wielkości orzechów włoskich i układaj na posmarowanej tłuszczem blasze. Każdą z kulek delikatnie przyciśnij płaską łyżką, obtoczoną w mące lub posmarowaną tłuszczem.

(bo jak np. nie dostudzisz na kratce, to będą strasznie twarde!)

Piecz w temperaturze 190°C przez 8–10 minut. Studź przez 2 minuty na blasze, a następnie wyłóż na drucianą kratkę, aby całkiem ostygły.

DAR BOGÓW!

Otrzymasz czekoladowe pieguski.

A oto przykład z agro- i zootechniki

Określenie objętości stogów w metrach sześciennych

obwód w metrach	przerzut w metrach							
	8	9	10	11	12	13	14	15
12	24,0							
13	25,0	33,5						
14	26,5	35,5						
15	28,0	38,0	52,5					
16	29,5	40,0	55,0	68,0				
17	31,0	42,0	57,0	71,0	85,0			
18	32,0	44,0	59,0	74,0	88,5	104,0		
19	33,5	46,5	61,0	76,5	92,5	109,5	127,0	144,0
20	35,0	49,0	63,5	79,5	96,5	114,5	134,0	152,0
21	36,5	51,0	66,5	82,0	100,5	120,0	141,0	160,0
22		53,0	68,5	84,5	104,0	125,0	147,5	168,0
23		55,0	70,5	87,5	108,0	130,0	154,0	176,0
24			72,5	90,0	112,0	135,0	161,0	184,0
25			75,0	93,0	116,0	140,5	168,0	192,0

Jeśli linkę z uwiązanym na końcu kamieniem przerzucisz przez najwyższy punkt stogu tak, by ów kamień sięgnął ziemi, to *przerzut* będzie właśnie jej długością.

Poradnik łąkarza, PWRiL, 1961, str. 245, tab. 59; tego rodzaju tabel jest tam 126.

Przykład powyższy jest może szczególnie właściwy, gdyż metodologia empiryczna rozwinęła się do niesłychanie wysokiego poziomu w państwach rolniczych – takich imperiach jak Egipt, Nigeria i inne państwa rozlokowane wokół wielkich rzek. Stabilne warunki życia pozwalały uznać jego rytm za ład Wszechświata i nie kazały szukać przyczyn stabilnych regularności.

Przewrót

Ubogie, niewielkie, ale sprawne koczownicze plemiona pasterskie uderzyły na zasobne rolnicze imperia, traktując różnicę poziomu życia jako niezawinioną krzywdę.

Każdy z nas czytał zresztą o śmierci dobrego pasterza Abla z ręki podłego rolnika Kaina – należało się zrewanżować.

Z tego samego źródła dowiadujemy się o początku tych walk – to najazd Hyksosów na Egipt (−1800), potem dowiadujemy się o wyjściu Mojżesza z Egiptu (−1300), a już z innych źródeł mamy wieści o kończącej czas przemian wojnie trojańskiej (−1000).

Bo były to zmiany dwuetapowe. Najpierw umięśniony Conan-pasterz niewolił uroczą, umytą i uczesaną Amazonkę-rolniczkę, a potem ona brała go pod pantofel, czego skutkiem była całkowita asymilacja jego plemienia (taką hybrydową kulturę opisuje np. w *The Golden Bough* – polski skrót: *Złota gałąź* – James George Frazer). To zjawisko było tak odrażające dla kolejnych fal plemion pasterskich, że uznawały za oczywistość konieczność zniszczenia wszystkiego, co znalazły na swej drodze, w szczególności owe hybrydowe formacje państwowe.

Fabularnie można to przeczytać u Roberta Gravesa: *Wyprawa po złote runo*, dostępna również pod tytułem *Herkules z mojej załogi.*

Czas ten ze względu na totalne niszczenie dawnego porządku relacjonowany jest jako Wieki Ciemne (technicznie: żelazo zwyciężyło brąz),

Patrz np. Ewa Wipszycka-Bravo, *Historia starożytnych Greków.*

I powstaje dorycka Grecja: −VIII wiek;

Potem jeszcze były „dożynki” dawnego ładu: koniec Etrusków (Tarkwiniusze, −V wiek) i wojny punickie (−II wiek).

Powstaje metodologia dedukcyjna. Istotą rewolucji metodologicznej jest stwierdzenie, iż w zmiennych warunkach **wiedza pełna** jest nieosiągalna; w zmiennych warunkach potrzebna jest **wiedza pewna**.

Wymóg pewności wymusza idealizację – pewność musi eliminować wszelkie odstępstwa, co narzuca ostre reguły, jakie muszą spełniać twierdzenia – atomy wiedzy pewnej.

Rzeczownikami mogą być jedynie abstrakty (np. *zły pieniądz wypiera dobry pieniądz* nie dotyczy konkretnej waluty, *grawitacja* powoduje nie tylko spadanie, ale utrzymuje okręty na wodzie i unosi balony do góry);
czasowniki muszą być formalne, jednoznaczne (to, że *odcinek ma tyle samo punktów co prosta, na której leży* wymaga sprecyzowania zwrotu „ma tyle samo”);
a **zdania** – jedynie **warunkowe** (mimo iż *woda płynie z góry na dół*, każdy z nas widział fontannę). Gdy przesłanki dotyczą pojedynczych twierdzeń, nazywamy je założeniami, gdy całej grupy – aksjomatami.

No i najważniejsze: dedukcja – zdania mogą być przyczyną innych zdań.

W ten sposób pojawia się rzecz najsilniej odróżniająca obie metodologie:

metodologia dedukcyjna likwiduje niezależność poszczególnych elementów wiedzy, teraz stwierdzenia są zależne.

Powstają dwie struktury: teoria i praktyka.

A więc powstaje pytanie:

Black-out z STS z 1957 roku:

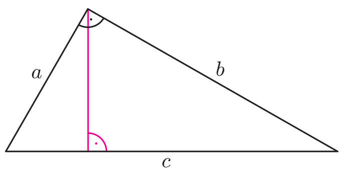
Co zrobić, gdy praktyka nie zgadza się z teorią?

– Trzeba zmienić teorię!
– Czyś ty zwariował!
– Trzeba zmienić praktykę?
– Chyba żartujesz!
– No to co zrobić?
– Zmienić, że się nie zgadza!!

I matematycy wybrali tę drogę. Oto przykład flagowy.

Zdanie: *Przy podobieństwie o skali λ pola zmieniają się w stosunku λ^2.*

jest przyczyną zdania: *W trójkącie prostokątnym suma kwadratów przyprostokątnych jest równa kwadratowi przeciwprostokątnej.*



Rys. 3

Dowód: Stosunek podobieństwa mniejszych trójkątów do największego to a/c i b/c, a ich pola składają się na jego pole, więc $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, czyli $a^2 + b^2 = c^2$.

A oto **konsekwencje**: oglądając kwadrat z narysowaną przekątną, widzimy konieczność fundamentalnej decyzji:
albo dopuścimy nieistniejące liczby, takie jak ta, której kwadratem jest 2,
albo uznamy, że pomysł z dedukcją i „zawszeprawdziwymi” twierdzeniami należy odrzucić.

Kłopot był poważny. Trwająca sto lat walka stronnictw – mistyczni akuzmatycy kontra fundamentalistyczni matematycy – została rozstrzygnięta w $-$V wieku: wygrała koncepcja doklejania do matematyki najrozmaitszych paskudztw,

i tak:
– dla rozwiązalności równań trzeciego stopnia wprowadzono liczby zespolone,
– dla twierdzeń Desarguesa, Pascala, Ponceleta, Steinera wprowadzono punkty w nieskończoności,
– dla zapewnienia istnienia rozwiązania równania różniczkowego wprowadzono przekroje i w konsekwencji liczby przestępne,
– dla istnienia nieliniowych rozwiązań równania Cauchy’ego wprowadzono pewnik wyboru i bazę Hamela
– i wiele, wiele innych dziwolągów,

a więc książka kucharska, czyli metodologia empiryczna poległa z kretesem.

Ale nowy, lepszy świat, świat wiedzy pewnej, mimo ponad 2500-letniego ciągłego ulepszania i doskonalenia, nie okazał się tak łaskawy, jak jeszcze sto lat temu przypuszczano.

Nie dość, że ideał wiedzy pewnej nie dał się implementować w wielu dyscyplinach, choćby w, odczuwanej jako pierwszoplanowa, medycynie, to jeszcze nawet matematykom z uporem odmawiał odpowiedzi na ważne pytania.

Choć, mówiąc słowami Hilberta, *wir müssen wissen* (musimy wiedzieć), to jednak czas, w którym ma się spełnić obiecane *wir werden wissen* (będziemy wiedzieć), wydaje się nam leżeć prawie w nieskończoności.

O ile są jeszcze tacy, którzy widzą siebie w sytuacji, gdy dowiadują się o prawdziwości (czy też nieprawdziwości) hipotezy Riemanna, to znaleźć przekonanych o tym, że równanie Naviera–Stokesa znienacka znajdzie rozwiązanie, raczej się nie da, choć sprawa ma fundamentalne znaczenie i bardzo liczni są ci, którzy nad nią pracują.

To wszystko powoduje, że metodologia książki kucharskiej odżywa, że coraz częściej matematycy zaczynają stosować nieledwie sumeryjskie metody i to z dobrym skutkiem.

Taki, na przykład, problem trzech ciał od pewnego czasu jest rozwiązywany fenomenologicznie, ale z jakże pięknymi efektami – proszę dla przykładu obejrzeć choćby `http://astro.u-strasbg.fr/~koppen/body/ThreeBodyHelp.html`

Ładnych parę lat młodszy ode mnie tranzystor umożliwił powstanie matematykopochodnej, ale nie matematykopodobnej dyscypliny, którą nazywamy informatyką.

W 1972 roku jej Najwyższy Kapłan, Donald Knuth, w artykule *Ancient Babylonian algorithms*, stwierdził, że sposób porządkowania i zdobywania wiedzy przez Sumerów nie jest pierwotną matematyką, lecz jest strukturalnie zbliżony właśnie do informatyki.

Gdy to połączyć z jego dewizą, iż dowód poprawności algorytmu nie dowodzi jego poprawności – tę można uzyskać jedynie przez przetestowanie, widzimy, że następuje renesans książki kucharskiej, choć dziś w naszych dyscyplinach przybiera ona nazwę algorytmu, maszyny Turinga czy funkcji obliczalnej.

Na zakończenie wypada dać dobitny przykład bezsilności matematycznych metod wobec wyzwań, jakie stawia rzeczywistość i informatyka.

Rzeczywistość to szeroko dyskutowana historia z wojny o Falklandy, jaką trzydzieści trzy lata temu stoczyła Wielka Brytania z Argentyną.

Wielką Brytanię reprezentować będzie niszczyciel rakietowy HMS Sheffield, Argentynę zaś samolot wielozadaniowy Dassault Super Étendard produkcji francuskiej, uzbrojony w, również francuskie, rakiety AM39 Exocet.

Informatykę reprezentować będzie oprogramowanie zamontowanej na niszczycielu broni antyrakietowej.

Podczas tygodniowej podróży Sheffielda z Anglii na Falklandy informatycy brytyjscy usiłowali znaleźć to miejsce w oprogramowaniu, gdzie jest powiedziane, że broń francuska to „swój”, a nie „obcy”. Jako że tak Wielka Brytania, jak i Francja były wojskowo związane z NATO, systemy informatyczne armii obu tych państw reagowały wzajemnie na ich uzbrojenie jak na własne. Zatem Sheffield postrzegał zarówno Étendardy, jak Exocety jako przyjazne, nawet gdy się do niego zbliżały. Należało to jakoś w oprogramowaniu zmienić, a w tym celu trzeba było znaleźć to miejsce w oprogramowaniu, gdzie jest o tym mowa. I na to tydzień nie wystarczył.

4 maja 1982 roku Sheffield został trafiony Exocetami i mimo pomocy innych jednostek 10 maja zatonął.

Przygody, jakie spotykają co jakiś czas różne systemy rejestracji chorych, rezerwacji biletów, ewidencji emerytur, zliczania głosów itp. pokazują, że może powinniśmy przyzwyczajać się do nowej metodologii myślenia i działania.