Klub 44

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 691 ($WT = 2{,}17$) i 692 ($WT = 1{,}80$) z numeru 12/2014

Piotr Kumor	Olsztyn	47,64
Wojciech Maciak	Warszawa	47,06
Marek Spychała	Warszawa	42,75
Wojciech Tobiś	Praszka	38,82
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	37,05
Janusz Olszewski	Warszawa	35,83
Krzysztof Maziarz	Kraków	35,37
Paweł Najman	Kraków	31,92

Piotr Kumor – superWeteran Ligi – konkretnie: czterokrotny; właśnie przekroczył magiczną linię 44 po raz dwunasty. Zaś pan Wojciech Maciak zaokrąglił liczbę członków Klubu 44 M do 5^3.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2015

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

697. Dana jest liczba naturalna $N > 1$ bezkwadratowa (tj. niepodzielna przez kwadrat żadnej liczby naturalnej większej od 1). Spośród wszystkich dodatnich dzielników liczby N losujemy kolejno, bez zwracania, dwa dzielniki: k, m. Rozważamy zdarzenia: (A) liczby k, m są względnie pierwsze; (B) liczba m jest podzielna przez k. Które z tych zdarzeń jest bardziej prawdopodobne? Czy odpowiedź zmieni się, gdy losowanie będzie wykonywane ze zwracaniem?

698. Dla ustalonej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ znaleźć najmniejszą wartość sumy

$$\left\lfloor \frac{1}{x_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x_2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor,$$

gdy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, spełniającymi warunek $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$.

697. Wygodnie będzie zacząć od przypadku, gdy losowanie jest ze zwracaniem. Wynik losowania to wówczas para uporządkowana (k, m) dzielników liczby N. Zdarzenia A, B identyfikujemy z odpowiednimi podzbiorami zbioru wszystkich takich par. Gdy para (k, m) należy do A, liczby k, m są względnie pierwszymi dzielnikami liczby N, zatem także iloczyn $q = km$ jest dzielnikiem N. Oczywiście k dzieli q, więc para (k, q) należy do B.

Na odwrót, gdy (k, q) jest dowolną parą ze zbioru B (więc $k \mid q$), wtedy iloraz $m = q/k$ też jest dzielnikiem N, i to względnie pierwszym z k (bo gdyby k, m miały wspólny dzielnik $p > 1$, liczba q, więc i N, byłaby podzielna przez p^2, wbrew założeniu zadania). Zatem para (k, m) należy do A.

Opisane operacje $(k, m) \mapsto (k, q)$, $(k, q) \mapsto (k, m)$ są wzajemnie odwrotne. Stąd wynika, że zbiory A i B są równoliczne; zaś zdarzenia A, B są (przy losowaniu ze zwracaniem) jednakowo prawdopodobne.

Losowanie bez zwracania eliminuje dublety, tzn. pary postaci (ℓ, ℓ), gdzie $\ell \mid N$. W poprzednim modelu, do zbioru A należała tylko jedna taka para $(1, 1)$; do B należały wszystkie. Więcej par zostało wyeliminowanych z B, wobec czego (przy losowaniu bez zwracania) zdarzenie A jest bardziej prawdopodobne niż B.

698. Skorzystamy ze znanej nierówności $\left(\sum x_i\right)\left(\sum 1/x_i\right) \geqslant n^2$; we wszystkich symbolach sumowania przyjmujemy $i = 1, \ldots, n$. Przy warunku $\sum x_i = 1$ mamy więc $\sum 1/x_i \geqslant n^2$. Dla każdej liczby rzeczywistej t słuszne jest oszacowanie $\lfloor t \rfloor > t - 1$. Stąd

$$\sum \left\lfloor \frac{1}{x_i} \right\rfloor > \sum \left(\frac{1}{x_i} - 1 \right) \geqslant n^2 - n,$$

czyli

$$\sum \left\lfloor \frac{1}{x_i} \right\rfloor \geqslant n^2 - n + 1.$$

W uzyskanej zależności można osiągnąć równość, biorąc na przykład

$$x_1 = \ldots = x_{n-1} = \frac{n^2}{n^3 - 1}, \qquad x_n = \frac{n^2 - 1}{n^3 - 1}.$$

Widać, że $\sum x_i = 1$. Dla $i = 1, \ldots, n-1$ mamy przy tym

$$\left\lfloor \frac{1}{x_i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^3 - 1}{n^2} \right\rfloor = \left\lfloor n - \frac{1}{n^2} \right\rfloor = n - 1,$$

zaś dla $i = n$:

$$\left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^3 - 1}{n^2 - 1} \right\rfloor = \left\lfloor n + \frac{1}{n + 1} \right\rfloor = n.$$

Tak więc $\sum \lfloor 1/x_i \rfloor = (n-1)(n-1) + n = n^2 - n + 1$ (dla tak określonych liczb x_i; można dać wiele innych przykładów). Wniosek: liczba $n^2 - n + 1$ to szukane minimum.