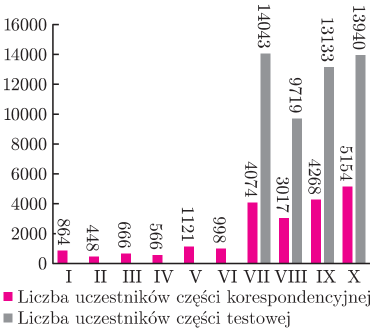
X Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

25. kwietnia odbyły się finałowe zawody jubileuszowej, X Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, a dzień później, 26. kwietnia w pięknej auli Politechniki Warszawskiej 86. uczestnikom wręczono dyplomy laureatów.

W zawodach stopnia pierwszego X Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów wzięło udział 13940 uczniów z 1235 szkół (5154 nadesłało potem rozwiązania zadań z części korespondencyjnej). Do zawodów stopnia II zakwalifikowano 1138 uczniów z 520 szkół, a do zawodów stopnia trzeciego 157 z 86 szkół.

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów (OMG), młodsza siostra Olimpiady Matematycznej, powstała w roku 2005 dzięki zapałowi i pasji ludzi związanych z Komitetem Głównym Olimpiady Matematycznej. W regulaminie OMG wpisano: *Celem zawodów Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów jest rozbudzanie zamiłowania do matematyki wśród młodzieży szkół gimnazjalnych, wyszukiwanie uczniów zainteresowanych matematyką, kształtowanie umiejętności samodzielnego zdobywania wiedzy oraz stymulowanie aktywności poznawczej młodzieży uzdolnionej.*



Wykres obok przedstawia liczbę uczniów startujących w kolejnych edycjach Olimpiady. Gwałtowny wzrost liczby uczestników od VII OMG spowodowany jest rozszerzeniem pierwotnej formuły o część testową.

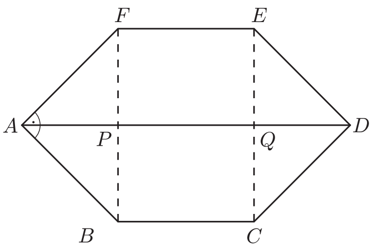
Zapisany w regulaminie cel „rozbudzania zamiłowania do matematyki...” realizowany jest nie tylko przez organizację zawodów, ale też przez różne działania towarzyszące, skierowane do uczniów (gazetka *Kwadrat*, Facebookowa Liga Zadaniowa, obozy naukowe) oraz nauczycieli (seminaria i wydawnictwa). Organizatorzy pierwszej olimpiady swoją pasją zarazili innych. W organizację olimpiady włącza się czynnie duża grupa wolontariuszy, w większości finalistów i laureatów poprzednich edycji. Oni też pracują obecnie w Komitecie Głównym, Komitetach Okręgowych i Komisji Zadaniowej.

Wiecej o historii i teraźniejszości OMG można przeczytać na stronie `http://om.edu.pl`.

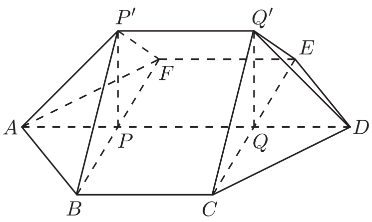
W czasie zawodów finałowych X OMG uczestnicy mieli, jak zwykle, trzy godziny na rozwiązanie pięciu zadań. Najtrudniejsze okazało się zadanie, które przytaczam poniżej. Tylko kilku zawodników przedstawiło poprawne rozwiązanie tego zadania.

Zadanie 1 (X OMG). Czy istnieje wielościan wypukły, którego dokładnie jedna ściana nie jest wielokątem foremnym?

Rozwiązanie. Tak, taki wielościan istnieje. Opiszemy, jak go skonstruować. Rozpatrzmy sześciokąt $ABCDEF$ o wszystkich bokach równej długości i kątach przy wierzchołkach A, B, C, D, E, F równych odpowiednio: $90°$, $135°$, $135°$, $90°$, $135°$, $135°$. Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych AD oraz BF, a Q punktem przecięcia przekątnych AD oraz CE (rys. 1.1). Łatwo wykazać, że $AP = BP = FP = QC = QE = QD$. Wybierzmy teraz w przestrzeni punkty P' oraz Q' po tej samej stronie płaszczyzny sześciokąta, tak aby proste PP' i QQ' były prostopadłe do tej płaszczyzny oraz aby $PP' = AP = QQ'$. Wielościan $ABCDEFP'Q'$ (rys. 1.2) spełnia warunki zadania – ma jedną ścianę, podstawę, która nie jest wielokątem foremnym, cztery ściany będące trójkątami równobocznymi i dwie ściany kwadratowe. Sprawdzenie tego faktu pozostawiamy Czytelnikom. □



Rys. 1.1



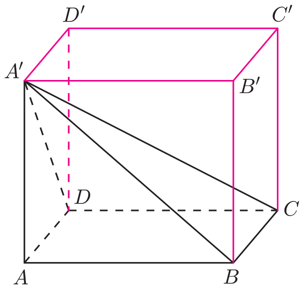
Rys. 1.2

Zadania, w których pojawia się pytanie o istnienie wielościanu spełniającego określone warunki, występują często wśród zadań olimpijskich. W dziesięciu edycjach olimpiady, na różnych etapach znajdziemy 10 zadań tego typu. Zawsze należało uzasadnić, że odpowiednią bryłę można zbudować. Konstrukcja wielościanu o zadanych własnościach wymagała od uczestników sporej wyobraźni i pomysłowości.

O kłopotach związanych z konstrukcją wielościanów spełniających określone warunki oraz o pewnych metodach ich konstrukcji można przeczytać w *Kwadratach* nr 7 oraz nr 12.

Czasem, aby skonstruować wielościan o wymaganych własnościach, trzeba dokładnie przyjrzeć się znanym bryłom i zauważyć tam pewne prawidłowości.

Zadanie 2 (II OMG). Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda ściana boczna jest trójkątem prostokątnym?



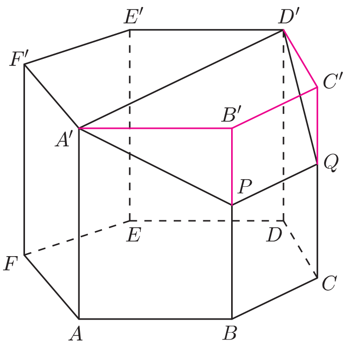
Rys. 2

Rozwiązanie. Tak, taki ostrosłup istnieje. Jeśli dokładnie przyjrzymy się prostopadłościanowi, to dostrzeżemy „w nim” nasz ostrosłup. Rzeczywiście, niech $ABCDA'B'C'D'$ będzie prostopadłościanem. Wówczas ostrosłup $ABCDA'$ spełnia warunki zadania (rys. 2). Trójkąty BAA' oraz DAA' są, oczywiście, prostokątne. Ponadto, ponieważ prosta BC jest prostopadła do płaszczyzny $A'AB$, to jest ona prostopadła do każdej prostej z tej płaszczyzny, w szczególności do prostej BA'. Zatem trójkąt CBA' jest prostokątny. Podobnie dowodzimy, że trójkąt CDA' jest prostokątny. □

Często aby skonstruować wielościan o pewnych własnościach, trzeba „zdeformować” inny „regularny” wielościan, na przykład, poprzez wycięcie lub doklejenie jakiegoś elementu.

Zadanie 3 (IV OMG). Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma nieparzystą liczbę krawędzi i którego każda ściana ma parzystą liczbę boków?

Rozwiązanie. Tak, taki wielościan istnieje. Rozpatrzmy graniastosłup sześciokątny o podstawach $ABCDEF$ oraz $A'B'C'D'E'F'$. Graniastosłup ten ma 18 krawędzi i wszystkie jego ściany mają parzystą liczbę boków. Gdyby udało się dodać jedną krawędź, nie zmieniając własności ścian, to otrzymany wielościan spełniałby warunki zadania. Zauważmy, że sześciokąt $A'B'C'D'E'F'$ można bez trudu podzielić jedną z przekątnych na dwa czworokąty. Teraz tylko trzeba zrobić z tych czworokątów ściany wielościanu przez pochylenie jednego z nich. Poprowadźmy więc przez punkty A' oraz D' płaszczyznę przecinającą krawędzie BB' i CC' odpowiednio w punktach P oraz Q. Płaszczyzna ta dzieli graniastosłup na dwa wielościany, z których jeden spełnia warunki zadania: ma osiem ścian będących czworokątami i jedną ścianę sześciokątną. Ponadto wielościan ten ma 19 krawędzi (rys. 3).

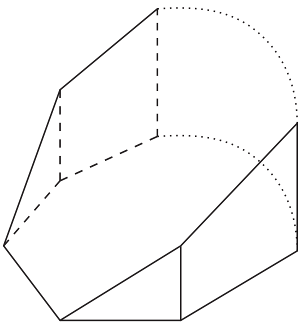


Rys. 3

Czytelnik Uważny skonstruuje podobną metodą inne przykłady wielościanów o zadanych własnościach, rozpatrując graniastosłup o podstawie będącej $2n$-kątem, dla $n > 3$. □

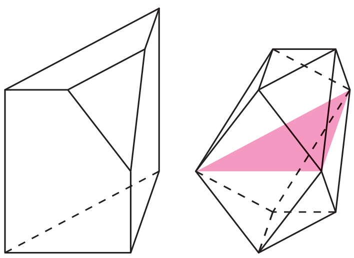
Zadanie 4 (V OMG). Czy istnieje wielościan wypukły mający dokładnie 100 ścian, z których co najmniej jedna jest 99-kątem i taki, że w każdym jego wierzchołku zbiegają się dokładnie trzy krawędzie?

Rozwiązanie. W każdym wierzchołku graniastosłupa o podstawie będącej 99-kątem zbiegają się dokładnie trzy krawędzie. Niestety, taki graniastosłup na 101 ścian. Spróbujemy pozbyć się jednej ściany tak, aby pozostałe własności nie zmieniły się. Przetnijmy nasz graniastosłup płaszczyzną przechodzącą przez jedną krawędź dolnej podstawy i przecinającą wszystkie boczne krawędzie (rys. 4). Płaszczyzna ta dzieli graniastosłup na dwa wielościany, z których dolny spełnia warunki zadania. □


Rys. 4

Zadanie 5 (IX OMG). Czy istnieje taki wielościan wypukły, że w każdym jego wierzchołku schodzą się co najmniej cztery krawędzie, i który można przeciąć pewną płaszczyzną, otrzymując w przekroju trójkąt?

Rozwiązanie. Rozpatrzmy graniastosłup trójkątny i płaszczyzną przechodzacą przez środki krawędzi wychodzących z jednego, wybranego wierzchołka odetnijmy z niego czworościan zawierający ten wierzchołek. Następnie w ten sam sposób odetnijmy czworościany z pozostałych „rogów” graniastosłupa (rys. 5). Otrzymany wielościan spełnia warunki zadania. □


Rys. 5

I jeszcze zadanie do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 6 (VIII OMG). Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma nieparzystą liczbę ścian, i w którego każdym wierzchołku schodzi się parzysta liczba krawędzi?

Czytelnik Uważny znajdzie wielościan o żądanych własnościach wśród prezentowanych w tym artykule. Proponujemy znalezienie innych przykładów.

Barbara ROSZKOWSKA-LECH