Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2015

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 689 ($WT = 1{,}60$) i 690 ($WT = 2{,}45$) z numeru 11/2014

Wojciech Maciak	Warszawa	43,85
Piotr Kumor	Olsztyn	43,67
Marek Spychała	Warszawa	42,75
Wojciech Tobiś	Praszka	38,82
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	35,79
Paweł Najman	Kraków	31,92
Janusz Olszewski	Warszawa	31,86
Krzysztof Maziarz	Kraków	31,40

Zadania z matematyki nr 703, 704

Redaguje Marcin E. KUCZMA

703. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym kąty wewnętrzne przy wierzchołkach A oraz C są równe, przy tym ostre. Punkty P, Q, leżące odpowiednio na półprostych $AB^{\to}$, $AD^{\to}$, są wyznaczone przez warunki $|CP| = |CQ| = |CA|$. Wykazać, że długość odcinka PQ nie przekracza obwodu trójkąta ABD.

704. Wyznaczyć największą liczbę A oraz najmniejszą liczbę B, takie że dla każdej czwórki liczb rzeczywistych a, b, c, d spełniona jest nierówność

$$A \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \leqslant ab + 2bc + cd \leqslant B \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

Zadanie 704 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2015

Przypominamy treść zadań:

695. Znaleźć wszystkie pary wielomianów rzeczywistych P, Q, spełniające równanie

$$\frac{P(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} = \frac{Q(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

696. Wyznaczyć największą możliwą liczbę punktów, jakie można rozmieścić na płaszczyźnie tak, by każde trzy spośród nich były wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

695. Oznaczmy przez $L(x)$ oraz $R(x)$ lewą i prawą stronę postulowanego równania

$$L(x) = (x^2 + x + 1)P(x^2 - x + 1) = (x^2 - x + 1)Q(x^2 + x + 1) = R(x).$$

Przyjmijmy, że P, Q nie są wielomianami zerowymi. Jasne, że muszą mieć jednakowy stopień $n \geqslant 1$ oraz równe współczynniki wiodące:

$$P(x) = ax^n + F(x), \quad Q(x) = ax^n + G(x) \quad (a \neq 0);$$
$$F, G \text{ – wielomiany stopni } \leqslant n - 1.$$

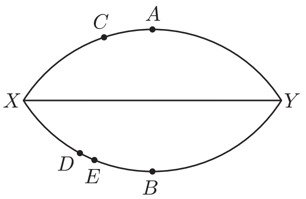
Tak więc

$$\begin{aligned} P(x^2 - x + 1) &= a(x^2 - x + 1)^n + F(x^2 - x + 1) = \\ &= ax^{2n} - nax^{2n-1} + (\text{wielomian stopnia} \leqslant 2n - 2); \\ Q(x^2 + x + 1) &= a(x^2 + x + 1)^n + G(x^2 + x + 1) = \\ &= ax^{2n} + nax^{2n-1} + (\text{wielomian stopnia} \leqslant 2n - 2); \end{aligned}$$

i dalej

$$\begin{aligned} L(x) &= ax^{2n+2} + (a - na)x^{2n+1} + (\text{wielomian stopnia} \leqslant 2n); \\ R(x) &= ax^{2n+2} + (na - a)x^{2n+1} + (\text{wielomian stopnia} \leqslant 2n). \end{aligned}$$

Stąd $a - na = 0$, czyli $n = 1$, czyli $P(x) = ax + b$, $Q(x) = ax + c$. Podstawiając w wyjściowym równaniu $x = 0$ oraz $x = 1$, otrzymujemy zależności $b = c$ oraz $3(a + b) = 3a + c$, skąd $b = c = 0$. Ostatecznie więc $P(x) = Q(x) = ax$; przyjęliśmy, że $a \neq 0$ – wszelako dla $a = 0$ dostajemy parę wielomianów zerowych, które też są rozwiązaniem. Oczywiście każda para postaci $P(x) = Q(x) = ax$ ($a \in \mathbb{R}$ – dowolna stała) spełnia zadane równanie.



696. Wierzchołki oraz środek pięciokąta foremnego dają przykład szóstki punktów o podanej własności. Pokażemy, że siedmiu punktów nie da się rozmieścić w wymagany sposób.

Przypuśćmy, że jest to możliwe i niech A, B będą dwoma punktami z tej siódemki, których odległość jest maksymalna. Pozostałe punkty leżą w „soczewce”, ograniczonej łukami okręgów o środkach A, B i promieniu $|AB|$. Skoro każdy z tych pięciu punktów ma wraz z A, B tworzyć trójkąt równoramienny, mogą one leżeć jedynie na owych łukach oraz odcinku XY, łączącym ich wspólne końce. Na samym odcinku XY leżą co najwyżej dwa punkty (trójka współliniowa nie tworzy trójkąta). Pozostałe trzy punkty leżą na łukach XAY, XBY (bez końców X, Y).

Nie mogą wszystkie trzy leżeć na jednym z tych łuków, np. XAY, bowiem wraz z punktem A dałoby to czwórkę punktów, spośród których pewne trzy nie tworzyłyby trójkąta równoramiennego. Zatem na jednym łuku, np. XAY, leży jeden punkt C, zaś na łuku XBY dwa punkty D, E. Przyjmijmy, że C leży między A i X.

Każdy punkt łuku BY jest oddalony od C o odcinek dłuższy niż $|AB|$, więc D, E muszą być punktami łuku BX. Każdy z odcinków AC, CD ma wtedy długość mniejszą niż $|AD|$ ($= |AX| = |AB|$); warunek równoramienności trójkąta ACD wymusza równość $|AC| = |CD|$. Zastępując w tym rozumowaniu D przez E, dostajemy równość $|AC| = |CE|$. Wobec tego $|CD| = |CE|$. To już jest oczekiwana sprzeczność, bo jedynym punktem łuku XAY, położonym w równych odległościach od D i E, czyli na symetralnej odcinka DE, jest punkt A.

Stąd odpowiedź: największa liczba punktów, o jakich mowa w zadaniu, wynosi sześć.