Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2015

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 687 ($WT = 1{,}07$) i 688 ($WT = 2{,}08$) z numeru 10/2014

Michał Miodek	Zawiercie	46,62
Marek Spychała	Warszawa	42,75
Wojciech Maciak	Warszawa	42,25
Piotr Kumor	Olsztyn	39,62
Wojciech Tobiś	Praszka	37,22
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	35,79

Michał Miodek – już po raz drugi.

Zadania z matematyki nr 701, 702

Redaguje Marcin E. KUCZMA

701. Niech n będzie ustaloną dodatnią liczbą nieparzystą. Wyznaczyć największą możliwą liczność zbioru złożonego z liczb całkowitych dodatnich, mniejszych od $3n$, w którym każde dwa różne elementy mają i różnicę, i sumę różną od n.

702. Niech $F_n(t) = t^n + (t+1)^n$. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych $n \geqslant 1$, dla których równanie $F_{2n}(x) = F_n(y)$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych $x, y \geqslant 1$.

Zadanie 702 zaproponował pan Piotr Kumor z Olsztyna.

Opatrzył je komentarzem: dokładnie przed ćwierćwieczem to samo równanie było przedmiotem zadania ligowego 194 (*Delta* 5/1990 – treść i rozwiązanie); teza brzmiała: dla $n \geqslant 2$ równanie może mieć w liczbach całkowitych x, y co najwyżej skończenie wiele rozwiązań (autor: Marcin Mazur); zaś w rocznym omówieniu (*Delta* 2/1992) pozostało otwarte pytanie, czy to równanie w ogóle ma rozwiązania poza trywialnymi ($|x|, |y| \leqslant 1$); obecna propozycja to mały krok w kierunku próby badania tego problemu.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2015

Przypominamy treść zadań:

693. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste niewymierne x, dla których każda z liczb $x^2 - 44x$ oraz $x^3 - 2015x$ jest wymierna.

694. Niech $a(n)$ oznacza odległość liczby naturalnej n od najbliższej liczby, będącej pełnym kwadratem: $a(n) = \min\{|n-k^2| : k \in \mathbb{N}\}$, i niech $S(n) = a(1) + \ldots + a(n)$ oraz $f(n) = \frac{1}{n}S(n)$. Udowodnić, że każda dodatnia liczba całkowita występuje w ciągu $f(1), f(2), f(3), \ldots$ dokładnie trzykrotnie.

693. Zgodnie z zadaniem, niech $x \notin \mathbb{Q}$ będzie taką liczbą, że $\alpha = x^2 - 44x \in \mathbb{Q}$ oraz $\beta = x^3 - 2015x \in \mathbb{Q}$. Tak więc

$$\alpha x = x^3 - 44x^2 = (\beta + 2015x) - 44(\alpha + 44x) = (\beta - 44\alpha) + 79x,$$

skąd $(\alpha - 79)x \in \mathbb{Q}$. Skoro $x \notin \mathbb{Q}$, musi być $\alpha - 79 = 0$. Dostajemy równanie $x^2 - 44x = 79$, z rozwiązaniami $x = 22 + \sqrt{563}$ oraz $x = 22 - \sqrt{563}$. Obie wartości spełniają wymagane warunki ($\alpha = x^2 - 44x = 79$, $\beta = x(x^2 - 2015) = 44 \cdot 79$).

694. Liczby, dla których najbliższym kwadratem jest k^2, mają postać

$$(1) \qquad k^2 + r \quad (0 \leqslant r \leqslant k) \quad \text{lub} \quad k^2 - r \quad (1 \leqslant r \leqslant k-1).$$

Suma wartości $a(n)$ dla tych liczb wynosi $2(1 + \ldots + k) - k = k^2$. Stąd

$$S(k^2) = S(k^2 + k) - (1 + \ldots + k) = \\ = (1^2 + \ldots + k^2) - (1 + \ldots + k) = \frac{k(k^2-1)}{3}.$$

Dla liczb postaci (1) obliczamy:

$$S(k^2 + r) = S(k^2) - (1 + 2 + \ldots + r) = \frac{k(k^2-1)}{3} + \frac{r(r+1)}{2},$$
$$S(k^2 - r) = S(k^2) - (0 + 1 + \ldots + (r-1)) = \\ = \frac{k(k^2-1)}{3} - \frac{r(r-1)}{2}.$$

Aby ujednolicić zapis, wprowadzamy parametr $\epsilon = \pm 1$ i wyznaczamy $f(n) = S(n)/n$ (dla n w formie (1)):

$$f(k^2 + \epsilon r) = \frac{\frac{1}{3}k(k^2-1) + \epsilon \cdot \frac{1}{2}r(r+\epsilon)}{k^2 + \epsilon r} \\ \left(\begin{array}{l} \epsilon = +1: \ r = 0, 1, \ldots, k, \\ \epsilon = -1: \ r = 1, \ldots, k{-}1 \end{array} \right).$$

Interesują nas wartości całkowite uzyskanego wyrażenia. Przekształcamy je do postaci

$$(2) \qquad f(k^2 + \epsilon r) = \frac{k}{3} - h(k, \epsilon, r), \\ \text{gdzie} \quad h(k, \epsilon, r) = \frac{(\epsilon r + 1)(2k - 3r)}{6(k^2 + \epsilon r)}.$$

Dla $r = 0$ oraz $r = k$ ($\epsilon = 1$) wychodzą wartości niecałkowite – można je zignorować, ograniczając zakres parametru r do $1, \ldots, k{-}1$. Wówczas

$$|h(k, \epsilon, r)| = \frac{|\epsilon r + 1| \cdot |2k - 3r|}{6|k^2 + \epsilon r|} \leqslant \frac{k(2k-3)}{6(k^2 - k + 1)} < \frac{1}{3}.$$

Różnica (2) jest więc liczbą całkowitą (równą j) wtedy i tylko wtedy, gdy $k = 3j$, zaś $h(k, \epsilon, r) = 0$. Gdy $k = 3j$, ostatni warunek ($h = 0$) jest spełniony dla trzech par (ϵ, r), mianowicie $(-1, 1)$, $(-1, 2j)$, $(+1, 2j)$.

Wniosek: dowolna liczba całkowita $j \geqslant 1$ jest wartością wyrażenia $f(n)$ jedynie dla $n = k^2 + \epsilon r$, gdzie $k = 3j$, zaś (ϵ, r) jest jedną z trzech powyższych par – czyli, po podstawieniu, dla $n = 9j^2 - 1$, $n = 9j^2 - 2j$, $n = 9j^2 + 2j$.