Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2015

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 685 ($WT = 1{,}85$) i 686 ($WT = 1{,}53$) z numeru 9/2014

Jerzy Cisło	Wrocław	46,97
Tomasz Wietecha	Tarnów	44,78
Michał Miodek	Zawiercie	43,68
Marek Spychała	Warszawa	42,75
Wojciech Maciak	Warszawa	41,18
Piotr Kumor	Olsztyn	36,47
Wojciech Tobiś	Praszka	36,15

I znów dwa nazwiska, jakże dobrze znane. Linię 44 przekraczają jednocześnie dwaj wytrawni wielokrotni Weterani: Jerzy Cisło (po raz jedenasty) i Tomasz Wietecha (po raz dziesiąty).

Z żalem żegnamy

ANDRZEJA IDZIKA

Nadweterana Klubu 44F i dwukrotnego Weterana Klubu 44M

Zadania z matematyki nr 699, 700

Redaguje Marcin E. KUCZMA

699. Cztery różne punkty na płaszczyźnie wyznaczają sześć odcinków. Załóżmy, że trzy spośród tych odcinków mają jednakową długość a, zaś pozostałe trzy mają jednakową długość b, przy czym $a < b$. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości stosunku b/a.

700. Czy dla każdej funkcji $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, spełniającej warunek $g(1) = 1$, istnieje funkcja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, spełniająca warunki $f(n) \geqslant g(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $f(mn) = f(m)f(n)$ dla każdej pary liczb względnie pierwszych $m, n \in \mathbb{N}$? ($\mathbb{N}$ to zbiór wszystkich liczb całkowitych dodatnich).

Zadanie 700 zaproponował pan Jędrzej Garnek z Poznania.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2014

Przypominamy treść zadań:

691. Mamy skończoną liczbę koszyków, w każdym z nich skończoną liczbę kamieni; znamy wagę każdego kamienia. Wykonujemy ciąg ruchów. W każdym ruchu przekładamy jeden kamień z jakiegoś koszyka K do innego koszyka K'; musi być przy tym spełniony warunek, że łączna waga kamieni w koszyku K' po wykonaniu ruchu jest mniejsza niż łączna waga kamieni w koszyku K przed wykonaniem ruchu. Czy ciąg ruchów może być nieskończony?

692. Dany jest trójkąt ABC. Rozważamy trzy elipsy: każda z nich ma ogniska w dwóch wierzchołkach tego trójkąta i przechodzi przez trzeci wierzchołek. Pokazać, że te trzy elipsy mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ABC jest prostokątny.

691. Ponumerujmy koszyki: $K_1, \ldots, K_n$. Niech W_i będzie wagą koszyka K_i (tj. łączną wagą kamieni w tym koszyku) w ustalonej chwili. W kolejnym ruchu przekładamy kamień z koszyka K_j do koszyka K_l. Niech x będzie wagą tego kamienia; postulowany warunek:

$$W_l + x < W_j.$$

Suma kwadratów wag koszyków po wykonaniu ruchu wynosi

$$\sum_{i\neq j,l} W_i^2 + (W_j - x)^2 + (W_l + x)^2 = \\ = \sum_i W_i^2 + 2x(x + W_l - W_j) < \sum_i W_i^2.$$

Suma kwadratów wag jest więc (ścisłym) półniezmiennikiem: maleje w każdym kroku procedury. Jest tylko skończenie wiele możliwych rozlokowań kamieni w koszykach, więc wartości tego półniezmiennika przebiegają zbiór skończony. Proces musi się zakończyć.

692. Załóżmy, że trzy elipsy, o których mowa, mają punkt wspólny X, leżący w odległościach x, y, z odpowiednio od wierzchołków A, B, C zadanego trójkąta, o bokach długości $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$. Elipsa o ogniskach B, C przechodzi przez punkty A, X, więc $y + z = b + c$. Analogicznie $z + x = c + a$, $x + y = a + b$. Ten układ równań z niewiadomymi x, y, z ma jedyne rozwiązanie $x = a$, $y = b$, $z = c$. Odległości punktu X od B oraz C wynoszą więc, odpowiednio, b oraz c – czyli przeciwnie niż odległości punktu A od B oraz C. To wyznacza dwa możliwe położenia punktu X – może to być punkt symetryczny do A względem symetralnej odcinka BC lub punkt symetryczny do A względem środka odcinka BC.

W pierwszym przypadku punkty X, A, B, C są wierzchołkami trapezu równoramiennego ($BC \parallel AX$); w drugim – tworzą równoległobok $ABXC$. Dodatkowa informacja, że $a = x$, czyli $|BC| = |AX|$, daje w obu przypadkach wniosek, że ów czworokąt jest prostokątem. A zatem trójkąt ABC jest prostokątny.

Na odwrót, gdy trójkąt jest prostokątny, wówczas wystarczy go uzupełnić do prostokąta czwartym wierzchołkiem; widać, że ów wierzchołek będzie wspólnym punktem trzech omawianych elips.