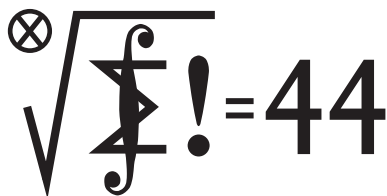


Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2015

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 685 ($WT = 1,85$) i 686 ($WT = 1,53$) z numeru 9/2014

Jerzy Cisło	Wrocław	46,97
Tomasz Wietecha	Tarnów	44,78
Michał Miodek	Zawiercie	43,68
Marek Spychała	Warszawa	42,75
Wojciech Maciak	Warszawa	41,18
Piotr Kumor	Olsztyn	36,47
Wojciech Tobiś	Praszka	36,15

I znów dwa nazwiska, jakże dobrze znane. Linię 44 przekraczają jednocześnie dwaj wytrawni wielokrotni Weterani: Jerzy Cisło (po raz jedenasty) i Tomasz Wietecha (po raz dziesiąty).

Zadania z matematyki nr 699, 700

Redaguje Marcin E. KUCZMA

699. Cztery różne punkty na płaszczyźnie wyznaczają sześć odcinków. Załóżmy, że trzy spośród tych odcinków mają jednakową długość a , zaś pozostałe trzy mają jednakową długość b , przy czym $a < b$. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości stosunku b/a .

700. Czy dla każdej funkcji $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, spełniającej warunek $g(1) = 1$, istnieje funkcja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, spełniająca warunki $f(n) \geq g(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $f(mn) = f(m)f(n)$ dla każdej pary liczb względnie pierwszych $m, n \in \mathbb{N}$? (\mathbb{N} to zbiór wszystkich liczb całkowitych dodatnich).

Zadanie 700 zaproponował pan Jędrzej Garnek z Poznania.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2014

Przypominamy treść zadań:

691. Mamy skończoną liczbę koszyków, w każdym z nich skończoną liczbę kamieni; znamy wagę każdego kamienia. Wykonujemy ciąg ruchów. W każdym ruchu przekładamy jeden kamień z jakiegoś koszyka K do innego koszyka K' ; musi być przy tym spełniony warunek, że łączna waga kamieni w koszyku K' po wykonaniu ruchu jest mniejsza niż łączna waga kamieni w koszyku K przed wykonaniem ruchu. Czy ciąg ruchów może być nieskończony?

692. Dany jest trójkąt ABC . Rozważamy trzy elipsy: każda z nich ma ogniska w dwóch wierzchołkach tego trójkąta i przechodzi przez trzeci wierzchołek. Pokazać, że te trzy elipsy mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ABC jest prostokątny.

691. Ponumerujemy koszyki: K_1, \dots, K_n . Niech W_i będzie wagą koszyka K_i (tj. łączną wagą kamieni w tym koszyku) w ustalonej chwili. W kolejnym ruchu przekładamy kamień z koszyka K_j do koszyka K_l . Niech x będzie wagą tego kamienia; postulowany warunek:

$$W_l + x < W_j.$$

Suma kwadratów wag koszyków po wykonaniu ruchu wynosi

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j, l} W_i^2 + (W_j - x)^2 + (W_l + x)^2 &= \\ &= \sum_i W_i^2 + 2x(x + W_l - W_j) < \sum_i W_i^2. \end{aligned}$$

Suma kwadratów wag jest więc (ściśle) póniezmennikiem: maleje w każdym kroku procedury. Jest tylko skończenie wiele możliwych rozlokowań kamieni w koszykach, więc wartości tego póniezmennika przebiegają zbiór skończony. Proces musi się zakończyć.

692. Załóżmy, że trzy elipsy, o których mowa, mają punkt wspólny X , leżący w odległościach x, y, z odpowiednio od wierzchołków A, B, C zadanego trójkąta, o bokach długości $|BC| = a, |CA| = b, |AB| = c$. Elipsa o ogniskach B, C przechodzi przez punkty A, X , więc $y + z = b + c$. Analogicznie $z + x = c + a, x + y = a + b$. Ten układ równań z niewiadomymi x, y, z ma jedyne rozwiązanie $x = a, y = b, z = c$. Odległości punktu X od B oraz C wynoszą więc, odpowiednio, b oraz c – czyli przeciwnie niż odległości punktu A od B oraz C . To wyznacza dwa możliwe położenia punktu X – może to być punkt symetryczny do A względem symetralnej odcinka BC lub punkt symetryczny do A względem środka odcinka BC .

W pierwszym przypadku punkty X, A, B, C są wierzchołkami trapezu równoramiennego ($BC \parallel AX$); w drugim – tworzą równoległobok $ABXC$. Dodatkowa informacja, że $a = x$, czyli $|BC| = |AX|$, daje w obu przypadkach wniosek, że ów czworokąt jest prostokątem. A zatem trójkąt ABC jest prostokątny.

Na odwrót, gdy trójkąt jest prostokątny, wówczas wystarczy go uzupełnić do prostokąta czwartym wierzchołkiem; widać, że ów wierzchołek będzie wspólnym punktem trzech omawianych elips.

Z żalem żegnamy

ANDRZEJA IDZIKA

Nadweterana Klubu 44F
i dwukrotnego
Weterana Klubu 44M