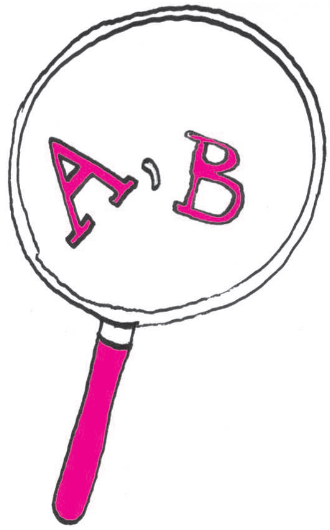
Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2015



Zadania z matematyki nr 697, 698

Redaguje Marcin E. KUCZMA

697. Dana jest liczba naturalna $N > 1$ bezkwadratowa (tj. niepodzielna przez kwadrat żadnej liczby naturalnej większej od 1). Spośród wszystkich dodatnich dzielników liczby N losujemy kolejno, bez zwracania, dwa dzielniki: k, m. Rozważamy zdarzenia: (A) liczby k, m są względnie pierwsze; (B) liczba m jest podzielna przez k. Które z tych zdarzeń jest bardziej prawdopodobne? Czy odpowiedź zmieni się, gdy losowanie będzie wykonywane ze zwracaniem?

698. Dla ustalonej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ znaleźć najmniejszą wartość sumy

$$\left\lfloor \frac{1}{x_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x_2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor,$$

gdy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, spełniającymi warunek $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$.

Zadanie 698 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2014

Przypominamy treść zadań:

689. Znaleźć wszystkie pary zbiorów A, B, zawartych w zbiorze liczb całkowitych, o następujących własnościach:

- każda liczba całkowita należy do co najmniej jednego ze zbiorów A, B;
- nie każda liczba całkowita należy jednocześnie do obu tych zbiorów;
- jeśli liczba x jest w zbiorze A, to liczba $x-1$ jest w zbiorze B;
- jeśli liczby x, y są w zbiorze B, to liczba $x+y$ jest w zbiorze A.

690. Ciąg liczb całkowitych dodatnich (a_n) spełnia warunki: $a_0 = 1$, $a_1 > 1$,

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}{a_{\lfloor n/2 \rfloor}} \qquad \text{dla } n \geqslant 1.$$

Niech

$$b_n = \frac{1}{a_{n+1} a_{\lfloor n/2 \rfloor}}.$$

Udowodnić, że szereg $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ jest zbieżny, a jego suma jest liczbą wymierną.

689. Niech A, B będzie parą zbiorów, spełniających wymienione warunki. Ponumerujmy te warunki, w podanej kolejności, (i), (ii), (iii), (iv).

Gdyby liczba 0 była w zbiorze B, to dla każdej liczby $b \in B$ mielibyśmy (z war. (iv)) $b + 0 \in A$; to by znaczyło, że zbiór B zawiera się w zbiorze A, czyli (z war. (i)) $A = \mathbb{Z}$. Wtedy (z war. (iii)) także $B = \mathbb{Z}$, co daje sprzeczność z warunkiem (ii). Wniosek: $0 \notin B$. Warunek (i) wymusza konkluzję: $0 \in A \setminus B$. Stąd (i z war. (iii)) $-1 \in B$.

Gdyby liczba 1 była w zbiorze A, to (z war. (iii)) $0 \in B$; a przecież $0 \in A \setminus B$. Tak więc $1 \notin A$, czyli (z war. (i)) $1 \in B \setminus A$.

Wykażemy indukcyjnie, że dla każdej liczby całkowitej $k \geqslant 0$:

$$(*) \qquad 2k \in A \setminus B, \qquad 2k+1 \in B \setminus A.$$

Dla $k = 0$ tak jest. Ustalmy liczbę $k \geqslant 0$ i przyjmijmy słuszność związków $(*)$ dla tej liczby k. Przypuśćmy, że $2k+2 \in B$; wtedy (z war. (iv)) $2k+1 = (2k+2) + (-1) \in A$, wbrew założeniu indukcyjnemu. Zatem $2k+2 \notin B$, czyli (z war. (i)) $2k+2 \in A \setminus B$.

Przypuśćmy z kolei, że $2k+3 \in A$. Wtedy (z war. (iii)) $2k+2 \in B$, wbrew temu, co wykazaliśmy tuż przed chwilą. Zatem $2k+3 \notin A$, czyli (z war. (i)) $2k+3 \in B \setminus A$. Uzyskaliśmy związki $(*)$ z liczbą k zastąpioną przez $k+1$. Z zasady indukcji własność $(*)$ przysługuje wszystkim liczbom całkowitym nieujemnym.

Teraz pokażemy, że ujemnym – też. Przypuśćmy, że $2k \in B$ dla pewnej liczby $k < 0$. Wiemy już (własność $(*)$), że $2|k| + 1 \in B$, a więc (z war. (iv)): $1 = (2|k|+1) + 2k \in A$; sprzeczność z wcześniejszym ustaleniem ($1 \in B \setminus A$). W takim razie $2k \notin B$, czyli (z war. (i)) $2k \in A \setminus B$.

Wreszcie przypuśćmy, że $2k+1 \in A$ dla pewnej liczby $k < 0$; wtedy (z war. (iii)) $2k \in B$, wbrew temu, co stwierdziliśmy przed chwilą. Zatem $2k+1 \notin A$, czyli (z war. (i)) $2k+1 \in B \setminus A$.

Mamy więc słuszność związków $(*)$ dla wszystkich $k \in \mathbb{Z}$. Mówią one, że A jest zbiorem wszystkich liczb parzystych, a B jest zbiorem wszystkich liczb nieparzystych. Ta para zbiorów spełnia, rzecz jasna, wymagane warunki – i jest to jedyna taka para.

690. Oznaczmy $1/(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) = c_n$. Liczby $a_1, a_2, a_3, \ldots$ są całkowite i większe od 1, czyli większe lub równe 2. Zatem $c_n \leqslant 2^{-n}$.

Z rekurencyjnego określenia ciągu (a_n) wynika, że

$$(a_{n+1} - 1)c_n = \frac{1}{a_{\lfloor n/2 \rfloor}} = a_{n+1} b_n.$$

Stąd

$$b_n = \left(1 - \frac{1}{a_{n+1}}\right) c_n = c_n - c_{n+1},$$

$S_n = b_1 + \ldots + b_n = (c_1 - c_2) + \ldots + (c_n - c_{n+1}) = c_1 - c_{n+1}$. A skoro $c_{n+1} \leqslant 2^{-n-1}$, widzimy, że $S_n \to c_1 = 1/a_1$ przy $n \to \infty$. Jest to suma szeregu $\sum b_n$; i oczywiście jest to liczba wymierna.