Oszacujmy pole

Joanna JASZUŃSKA

Korzystając z tytułowego pomysłu oraz z rysunku 1 lub drobnych jego modyfikacji, można udowodnić szereg twierdzeń z różnych działów matematyki.

Zauważmy, że pole całego kwadratu jest nie mniejsze od sumy pól czterech zawartych w nim białych prostokątów. Stąd $(a+b)^2 \geqslant 4ab$, uzyskujemy więc $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, czyli *nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną*.

Dla $b = \frac{1}{a}$, każdy z prostokątów ma pole równe 1, zatem $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 \geqslant 4$. Stąd *liczba dodatnia i jej odwrotność zawsze dają w sumie co najmniej 2*.

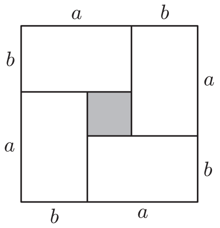
Zamiast kwadratu o boku $a+b$, rozważmy kwadrat o boku $\frac{a\sqrt{ab}}{a+b} + \frac{b\sqrt{ab}}{a+b} = \sqrt{ab}$, przedstawiony na rysunku 2. Analogiczna jak dotychczas analiza pól pozwala udowodnić *nierówność pomiędzy średnią geometryczną a harmoniczną*:

$$\sqrt{ab}^2 \geqslant 4 \cdot \frac{a\sqrt{ab}}{a+b} \cdot \frac{b\sqrt{ab}}{a+b}, \qquad \sqrt{ab} \geqslant \frac{2ab}{a+b}, \qquad \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

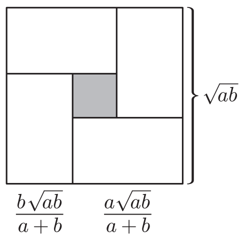
Ciąg Fibonacciego definiujemy tak: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ dla $n \geqslant 2$. Rozumowanie podobne do powyższych pozwala dowieść następującej tożsamości:

$$F_{n+1}^2 = 4F_nF_{n-1} + F_{n-2}^2 \qquad \text{dla } n \geqslant 3.$$

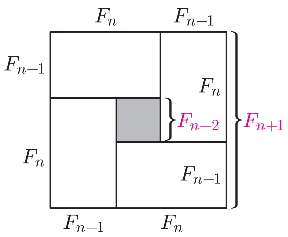
Rozważmy w tym celu kwadrat o boku $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$ (rys. 3). Zauważmy, że mały szary kwadracik pośrodku ma wówczas bok długości $F_n - F_{n-1} = F_{n-2}$. Wobec tego powyższa tożsamość opisuje pole całego dużego kwadratu.



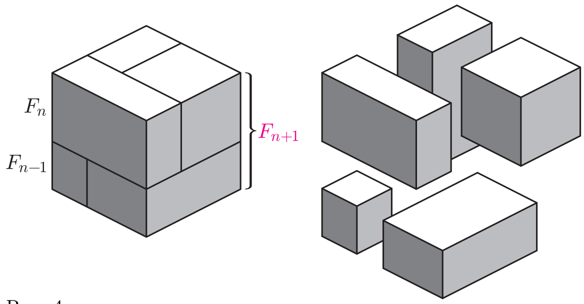
Rys. 1. $a, b > 0$.



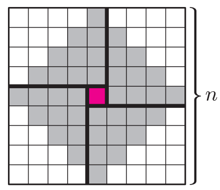
Rys. 2. $a, b > 0$.



Rys. 3



Rys. 4

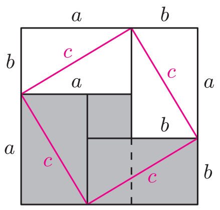


Rys. 5

Podobnie, analiza objętości sześcianu o krawędzi $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$ podzielonego na kilka części tak, jak na rysunku 4, pozwala dowieść tożsamości

$$F_{n+1}^3 = F_n^3 + F_{n-1}^3 + 3F_{n-1}F_nF_{n+1} \qquad \text{dla } n \geqslant 2.$$

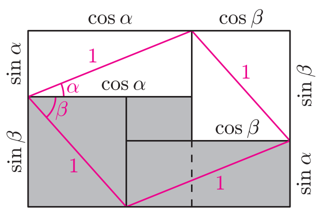
Z rysunku 5 można dla odmiany odczytać, że *dla nieparzystych liczb naturalnych n, liczba n^2 daje przy dzieleniu przez 8 resztę 1*.



Rys. 6. $a, b > 0$.

Oznaczmy przekątne prostokątów z rysunku 1 przez c (rys. 6). Usuwając cztery „zewnętrzne" trójkąty, otrzymujemy kolorowy kwadrat o boku c. Z kolei usuwając cztery „górne" trójkąty, uzyskujemy szarą figurę złożoną z kwadratów o bokach a i b. Równość pól prowadzi do *twierdzenia Pitagorasa*: $a^2 + b^2 = c^2$.

Ponadto, co najmniej połowa kwadratu jest szara, czyli $a^2 + b^2 \geqslant \frac{1}{2}(a+b)^2$. Stąd *nierówność pomiędzy średnią kwadratową a arytmetyczną*: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}$.



Rys. 7. $0 < \alpha, \beta < 90°$.

Przekątne prostokątów z rysunku 7 mają długości $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ oraz $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$. Dwukrotnie usuwając po cztery trójkąty prostokątne, podobnie jak powyżej, uzyskujemy z jednej strony kolorowy romb o boku 1 i kącie $\alpha + \beta$, z drugiej zaś strony szarą figurę złożoną z dwóch prostokątów. Stąd równość pól: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

Warto poszukać na rysunku 1 dowodów innych ciekawych faktów oraz odpowiedzi na pytanie, kiedy w opisanych powyżej nierównościach zachodzą równości.

Część przykładów pochodzi z wielu książek C. Alsiny i R. Nelsena.