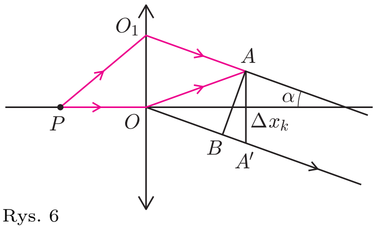

Rys. 6

utworzą wiązkę równoległą nachyloną do osi optycznej soczewki pod kątem α, przy czym $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{2f}$ (rys. 4). Po wycięciu części środkowej i zetknięciu połówek soczewki, promienie wychodzące z punktu P tworzą przecinające się wiązki równoległe. Z rysunku 5 widać, że maksymalna odległość, w jakiej można ustawić ekran, aby wiązki te interferowały ze sobą, wynosi $x_{\max} = \frac{D\operatorname{ctg}\alpha}{2} = \frac{Df}{a}$.

Niech ekran znajduje się w dowolnej odległości od soczewki, mniejszej niż $x_{\max}$. Na środku ekranu powstaje maksimum interferencyjne. Aby w p. A w odległości Δx_k od środka ekranu powstało k-te maksimum (rys. 6), promienie PO_1A i POA muszą się wzmacniać, zatem ich różnica dróg optycznych wynosi $\Delta s = k\lambda$. Droga optyczna promienia OA jest taka sama jak promienia OA'. Promienie z wiązki równoległej mają w punktach A i B zgodne fazy, zatem $\Delta s = 2\Delta x_k \sin\alpha \approx 2\Delta x_k \frac{a}{2f}$. Odległość między sąsiednimi prążkami wynosi $\Delta x = \Delta x_{k+1} - \Delta x_k = \frac{f\lambda}{a} = 0{,}5$ mm.

* * *

W ubiegłym roku najtrudniejsze okazało się zadanie 570, gdzie należało znaleźć przyspieszenie pręta poruszającego się w rurze z wodą. Jego współczynnik trudności wyniósł 3,90. Gdy pręt podnosi się, pewna masa wody porusza się do dołu, zapełniając oswobodzone miejsce. Siła działająca na pręt ze strony wody zależy od przyspieszenia tej wody. Prawo Archimedesa w postaci: siła wyporu równa jest ciężarowi wypartej cieczy, nie ma w tym przypadku zastosowania, a tak właśnie próbowali rozwiązać zadanie uczestnicy klubu. Trudne okazało się też zadanie 563 ($WT = 3{,}40$), które zresztą, jak słusznie wytknął mi **Andrzej Idzik**, pojawiło się już w *Delcie* w 1986 r. Trzeba było w nim obliczyć prędkość, jaką należy nadać ładunkowi punktowemu w środku wydrążonej metalowej kuli, aby oddalił się do nieskończoności przez wąską szczelinę w tej kuli. W nadesłanych rozwiązaniach uwzględniano na ogół oddziaływanie ładunku punktowego z ładunkami indukowanymi na powierzchniach kuli, natomiast nie uwzględniano oddziaływania między ładunkami indukowanymi na obu powierzchniach. W zadaniu 577, odpowiadając na pytanie, jaką prędkość uzyska walec po wyłączeniu pola magnetycznego, w którym był umieszczony, rozwiązujący zaniedbali zjawisko samoindukcji. Zadanie 575 (wciąganie cieczy dielektrycznej do kondensatora) część klubowiczów rozwiązała poprawnie, poszukując minimum energii takiego układu, część jednak uznała, że przyrost energii potencjalnej grawitacji rekompensowany jest obniżeniem energii elektrostatycznej, powtarzając błąd szeroko dyskutowany po jednej z matur jeszcze przed reformą. Niektóre błędy trzymają się więc mocno. Zadanie 576, gdzie klocki połączone sprężyną zsuwały się z równi, dwóch uczestników rozwiązało w układzie związanym z równią, wykazując się imponującą sprawnością rachunkową. Warto jednak było zrobić to w układzie związanym ze środkiem masy, co zdecydowanie upraszczało obliczenia i pozwalało łatwiej uchwycić istotę tego ruchu.

Dziękuję wszystkim, którzy nadsyłali rozwiązania, zapewniając mi sprzężenie zwrotne, przepraszam za niedociągnięcia i literówki, których nie udało się uniknąć. Podobnie jak w roku ubiegłym, wyrażam szczególne uznanie za sposób prezentacji na ogół bezbłędnych rozwiązań i ich dyskusję przez **Tomasza Wieteche̢**.

E. Z.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2015

Zadania z matematyki nr 695, 696

Redaguje Marcin E. KUCZMA

695. Znaleźć wszystkie pary wielomianów rzeczywistych P, Q, spełniające równanie

$$\frac{P(x^2-x+1)}{x^2-x+1} = \frac{Q(x^2+x+1)}{x^2+x+1} \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

696. Wyznaczyć największą możliwą liczbę punktów, jakie można rozmieścić na płaszczyźnie tak, by każde trzy spośród nich były wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Zadanie 696 zaproponował pan Krzysztof Kamiński z Pabianic.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2014

Przypominamy treść zadań:

687. Dowieść, że wśród dowolnie wybranych 39 kolejnych liczb naturalnych znajdzie się liczba, której suma cyfr dzieli się przez 11.

688. Trójkąt równoboczny ABC o boku długości 1 jest podstawą ostrosłupa prawidłowego $ABCS$. Na krawędziach SA, SB, SC leżą takie punkty X, Y, Z, że suma kwadratów pól trójkątów SXY, SYZ, SZX jest równa kwadratowi pola trójkąta XYZ. Obliczyć objętość ostrosłupa $ABCS$.

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po zakończeniu sezonu
(roku szkolnego) 2013/14

Jerzy Cisło	–	10–43,59
Tomasz Wietecha	–	9–42,14
Michał Miodek	–	1–40,49
Wojciech Maciak	–	39,65
Marek Spychała	–	1–39,37
Wojciech Tobiś	–	34,67
Piotr Kumor	–	11–33,09
Grzegorz Karpowicz	–	1–32,75
Tomasz Kochanek	–	32,40
Franciszek Salezy Sikorski	–	1–28,22
Jerzy Witkowski	–	5–27,02
Michał Koźlik	–	26,46
Paweł Najman	–	6–26,32
Krzysztof Maziarz	–	25,35
Janusz Olszewski	–	15–21,28
Bartłomiej Dyda	–	5–20,18
Paweł Burdzy	–	19,87
Zbigniew Skalik	–	2–19,42
Paweł Kubit	–	5–18,24
Adam Dzedzej	–	2–18,00
Witold Bednarek	–	6–17,84
Roksana Słowik	–	1–17,39
Jędrzej Garnek	–	2–17,19
Marcin Kasperski	–	3–16,39
Janusz Wojtal	–	16,17
Marcin Małogrosz	–	1–16,06

Legenda (przykładowo): stan konta 6–26,32 oznacza, że uczestnik już sześciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (siódmej) rundzie ma 26,32 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 15 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2012, 2013 lub 2014.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, *J. Ciach* (5), M. Prauza (4), P. Kumor (11), *P. Gadziński* (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (15), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (9), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Peczarski, M. Adamaszek, P. Kubit (5), J. Cisło (10), W. Bednarek (6), D. Kurpiel, P. Najman (6), M. Kieza (4), M. Kasperski, K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz

(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, A. Czornik, A. Daniluk, A. Dzedzej, Z. Galias, J. Garnek, A. Idzik, P. Jędrzejewicz, K. Kamiński, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, Z. Skalik, S. Solecki, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

687. Niech m będzie dowolną liczbą co najmniej dwucyfrową, której ostatnią cyfrą jest zero, a przedostatnią cyfrą nie jest dziewiątka. Wówczas w ciągu dwudziestu kolejnych liczb m, $m+1$, …, $m+19$ znajduje się liczba o sumie cyfr podzielnej przez 11; jeśli bowiem suma cyfr liczby m wynosi s, to sumy cyfr liczb $m+1$, …, $m+9$ wynoszą $s+1$, …, $s+9$, zaś liczba $m+19$ ma sumę cyfr równą $s+10$; rzecz jasna, któraś z wartości s, $s+1$, …, $s+10$ dzieli się przez 11.

Pozostaje teraz zauważyć, że każdy ciąg kolejnych 39 liczb naturalnych zawiera 20-wyrazowy blok o wyrazie początkowym m postaci, jak wyżej.

688. Ściany ASB, BSC, CSA są przystającymi trójkątami równoramiennymi, z jednakowym kątem φ przy wierzchołku S. Niech $t=\cos\varphi$. Oznaczając $x=|SX|$, $y=|SY|$, $z=|SZ|$, $u=|YZ|$, $v=|ZX|$, $w=|XY|$, mamy

$$(1)\qquad u^2=y^2+z^2-2t\,yz,\qquad v^2=z^2+x^2-2t\,zx,\qquad w^2=x^2+y^2-2t\,xy.$$

Pole trójkąta SXY wynosi $\frac{1}{2}xy\sin\varphi$; podobnie wyrażają się pola trójkątów SYZ, SZX. Suma kwadratów ich pól jest równa $\frac{1}{4}(1-t^2)\sum x^2y^2$; tu i dalej symbol $\sum$ oznacza sumę cykliczną względem trójki x,y,z (lub u,v,w).

Kwadrat pola trójkąta XYZ wyrażamy zgodnie ze wzorem Herona jako

$$\frac{1}{16}((u+v)^2-w^2)(w^2-(u-v)^2)=\frac{1}{16}(2uv+u^2+v^2-w^2)(2uv+w^2-u^2-v^2)=$$
$$=\frac{1}{16}\Big(2\sum u^2v^2-\sum u^4\Big)=\frac{1}{4}\sum u^2v^2-\frac{1}{16}\Big(\sum u^2\Big)^2.$$

Uzyskana wartość ma być równa $\frac{1}{4}(1-t^2)\sum x^2y^2$; mnożąc przez 4 dostajemy równanie

$$(2)\qquad \sum u^2v^2-\Big(\frac{1}{2}\sum u^2\Big)^2-(1-t^2)\sum x^2y^2=0.$$

Po wprowadzeniu w miejsce u^2, v^2, w^2 wyrażeń (1) i pogrupowaniu wszystkiego według potęg t (to mechaniczny rachunek) okazuje się, że wyrazy niezawierające t znoszą się, a całe równanie (2) redukuje się do postaci

$$2(x+y+z)(xyz)(t^2-t)=0.$$

Kąt φ jest niezerowy, więc $t=\cos\varphi\neq 1$; stąd $t=0$, czyli $\varphi=90°$. Zatem każdy z trójkątów ASB, BSC, CSA jest prostokątny i równoramienny, o przeciwprostokątnej długości 1; przyprostokątne SA, SB, SC mają długość $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Ostrosłup $SABC$ jest szóstą częścią sześcianu o krawędzi $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Jego objętość wynosi $\frac{1}{24}\sqrt{2}$.

* * *

Oto coroczne omówienie. Jak zwykle, wybrane zostały zadania ciekawsze i trudniejsze, gdzie uczestnicy ligi przedstawili różne zmyślne metody rozwiązań, interesujące uogólnienia, niebanalne komentarze. I jak zwykle namawiamy Czytelników do starannego prześledzenia owych „zmyślnych” rozwiązań, zreferowanych tutaj (z konieczności) mocno skrótowo. Po dopracowaniu ich uroda uwidoczni się w pełni.

Zadanie **667.** [Szachownica biało-czarna $n\times n$ (n – liczba parzysta); ciąg ruchów typu: zmiana kolorów wszystkich pól w wybranym prostokącie planszy; min(czas uzyskania planszy jednobarwnej)?] (współczynnik trudności $WT=2{,}35$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR=11$). Wszyscy podali jednakowy algorytm uzyskania żądanego efektu w n ruchach (wybierać co drugi wiersz i co drugą kolumnę). Uzasadnienia, że tego czasu skrócić się nie da, były różne, i raczej nie prostsze niż w rozwiązaniu firmowym – wszakże poprawne, a to się liczy. Ale, ale – dlaczego ograniczać się do n parzystych? Każde z podanych rozwiązań (firmowe też) wymaga jedynie drobnego retuszu, by objąć przypadek n nieparzystego (co zauważyli prawie wszyscy uczestnicy) – a nawet przypadek planszy prostokątnej $m\times n$; wynik $\lfloor m/2\rfloor+\lfloor n/2\rfloor$ wskazali **A. Dzedzej**, **J. Olszewski** oraz **M. Kasperski**, który ponadto zasugerował rozszerzenie zadania: rozważamy planszę $n\times n$, pomalowaną na starcie niekoniecznie „w szachownicę”; jaki jest minimalny czas, w którym z *dowolnego* wyjściowego układu pól czarnych można dojść do planszy jednobarwnej?

„jednokrotni": R. M. Ayoush, S. Bednarek, T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, P. Duch, J. Fiett, P. Figurny, M. Fiszer, Ł. Garncarek, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, A. Jóźwik, G. Karpowicz, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki, M. Łupieżowiec, M. Małogrosz, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, M. Miodek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Nadara, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, F. S. Sikorski, R. Słowik, A. Smolczyk, P. Sobczak, M. Spychała, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, *K. Trautman*, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Zadanie **669** [$\triangle ABC$; okrąg wpisany styczny do BC, CA, AB w D, E, F; punkty $X \in BC$, $Y \in CA$, $Z \in AB$: $|AY| = |AZ|$, $|BX| = |BZ| \Rightarrow$ prosta DE połowi odcinek XY] ($WT = 1{,}38$; $LPR = 17$). Łatwiutkie. Ale, jak zauważyła większość rozwiązujących, czegoś zabrakło w treści zadania – należało wykluczyć przypadek, gdy punkty X, Y, Z pokrywają się z D, E, F; wówczas bowiem, jak wdzięcznie zauważył **Jacek Bagiński**, prosta DE może rozpołowić odcinek XY jedynie wzdłuż, na dwa cieńsze...

Niebanalne spojrzenie na geometrię zadania zaproponował **Janusz Fiett**. Trzy proste *1*, *2*, *3* tworzą trójkąt. Wybieramy punkt na prostej *1*, po czym na prostej *2* wyznaczamy punkt leżący w tej samej odległości od punktu przecięcia $1 \cap 2$, tak, by półproste o początku $1 \cap 2$ i przechodzące przez owe dwa punkty (wyjściowy i odwzorowany) albo obie przecinały albo nie przecinały prostej *3*. Punkt otrzymany na prostej *2* w analogiczny sposób odwzorowujemy na punkt na prostej *3*, i dalej tak samo, cyklicznie. Po sześciu krokach wrócimy do punktu wyjściowego. Łącząc kolejne punkty odcinkami dostajemy łamaną sześcioboczną, o przeciwległych bokach równoległych i równoodległych od prostych, wyznaczonych przez punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt z jego bokami (stąd i teza zadania).

Gdy wszystkie uzyskane punkty leżą na *bokach* trójkąta, możemy pokusić się o model fizyczny: trójkątna płytka, opleciona pętlą sznurka, o kolejnych (sześciu) odcinkach biegnących, na przemian, po jednej i drugiej jej stronie, przy czym końce każdego odcinka są jednakowo odległe od odpowiedniego wierzchołka płytki; przesuwanie równoległe jednego (dowolnego) z owych odcinków wymusi analogiczne przesunięcia pozostałych odcinków, a sznurek pozostanie naprężony. (Gdy któryś z wierzchołków łamanej leży nie na boku trójkąta, lecz na jego przedłużeniu, model przestaje funkcjonować – ale jego algebraiczną namiastkę można uzyskać, wprowadzając znaki plus i minus). Wywód zwieńczony apetyczną zachętą: *Dalsze uogólnienie mogłoby dotyczyć wielokątów innych niż trójkąty, mających okrąg wpisany – w pewnych przypadkach także można je ładnie oplatać łamanymi; ale to już zupełnie inna historia...*

Zadanie **674** [$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x+1) = f(x) + 1$; $f(x^2) = f(x)^2 \Rightarrow f = ?$] ($WT = 2{,}94$; $LPR = 8$). Spośród zadań omawianego rocznika to okazało się najtrudniejsze; a także chyba najciekawsze. Jedyną funkcją, spełniającą oba równania, jest funkcja identycznościowa. Uzasadnienie, jak w rozwiązaniu firmowym (lub różniące się nieistotnie) podali **J. Garnek**, **P. Kumor**, **M. Małogrosz**, **J. Olszewski**. Elegancki i nieco odmienny dowód znalazł **Jerzy Cisło**: jak w firmowym, zauważa, że f jest funkcją nieparzystą i że odwzorowuje $\mathbb{R}_+$ w $\mathbb{R}_+$; następnie uzasadnia, że $f(r) = r$ dla $r = k/n \in \mathbb{Q}$ (przekształcając wyrażenie $f((r+n)^2)$ na dwa sposoby); wreszcie dowodzi, że $f(x) < f(y)$ dla $x < y$ – najpierw w przypadku, gdy $y - x \geqslant 1$ (i można między x i y włożyć liczbę całkowitą), potem gdy $x, y \in \langle 1; \infty)$ (więc wysokie potęgi tych liczb różnią się o 1 lub więcej); w pozostałym przypadku, przesunięcie o liczbę całkowitą przeniesie liczby do przedziału $\langle 1; \infty)$. Funkcja rosnąca, będąca identycznością na $\mathbb{Q}$, jest identycznością na $\mathbb{R}$.

Zgrabnie poradził sobie **Krzysztof Maziarz**. Wstępne spostrzeżenia (nieparzystość, $f \geqslant 0$ na $\mathbb{R}_+$), a dalej: przypuśćmy, że dla pewnego x zachodzi nierówność $x > f(x) =: x - \epsilon$. Weźmy $k \in \mathbb{N}$ tak duże, by $x + k =: y > (\epsilon + \epsilon^{-1})/2$. Z równania $f(y) = y - \epsilon$ wynika, że $f(y^2) = (y-\epsilon)^2 < y^2 - 1$; stąd zaś $f(y^2 - \lfloor y^2 \rfloor) < y^2 - 1 - \lfloor y^2 \rfloor < 0$, wbrew temu, że $f \geqslant 0$ na $\mathbb{R}_+$. Tak więc $f(x) \geqslant x$ dla $x \in \mathbb{R}$; wobec nieparzystości, $f(x) = x$. Podobne rozumowanie, zapisane nieco bardziej zawile, przedstawił **Adam Dzedzej**.

Janusz Fiett, bardzo oryginalnie, patrzy jedynie na wykres funkcji (czy raczej hipotetyczny wykres, bo to dowód nie wprost), widzi „drabinki punktów" i inne konfiguracje geometryczne; gdy zaś potrzebuje nierówności – uzasadnia je też geometrycznie, porównując pola pewnych prostokątów; język mocno nieformalny, uzasadnienia miejscami z lukami – ale w końcu wszystko się broni, zadanie zrobione.

Wspólnym rysem wszystkich rozwiązań jest użycie argumentów, należących do analizy matematycznej: granic ciągów lub przynajmniej nierówności, de facto generujących owe granice. Tymczasem teza zadania ma charakter algebraiczno-mnogościowy: jedyną funkcją, przemienną (w sensie superpozycji) z funkcjami $\varphi(x) = x + 1$, $\psi(x) = x^2$, jest $f(x) = x$. Jakie inne pary funkcji φ, ψ mają tę własność? Czy da się takie pary scharakteryzować w terminach czysto mnogościowych – w języku algebry zbiorów i relacji między orbitami iteracyjnymi φ, ψ? Nie są nam znane żadne twierdzenia tego typu; może ktoś z Czytelników?...

Zadanie **675** [Alfabet $\alpha, \ldots, \omega$ (24 litery); p_n = prawdopodobieństwo, że w losowym n-słowie litery α, ω nie sąsiadują; $\min\{n\colon\ p_n < 1/2\} = ?$] ($WT = 2{,}29$; $LPR = 8$). Jasne, że należało szukać rekurencji dla ciągu (p_n). Ciekawe, że można ją było uzyskać znacznie prościej, niż w firmówce: $p_n = m^{-n} c_n$, gdzie m to liczność alfabetu (tu $m = 24$), c_n jest liczbą n-słów bez $\alpha\omega$ lub $\omega\alpha$; piszemy $c_n = a_n + b_n$, gdzie a_n to liczba tych, które mają na końcu α lub ω, zaś b_n to liczba tych, które są zakończone inaczej. Związki $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$, $b_n = (m-2)c_{n-1}$ są doprawdy oczywiste i od razu dają rekurencję

$$(1) \qquad c_n = (m-1)c_{n-1} + (m-2)c_{n-2},$$

czyli

$$(2) \qquad p_n = \frac{m-1}{m}\, p_{n-1} + \frac{m-2}{m^2}\, p_{n-2} \qquad (m = 24).$$

W ten sposób postąpili: **Jerzy Cisło** (z dowolnym m), **Janusz Fiett** oraz **Roksana Słowik**.

Rozumowanie z rozwiązania firmowego też miało swoich zwolenników: **P. Kumor**, **M. Małogrosz**, **M. Miodek**, **J. Olszewski**. (Jeszcze trochę inną drogą doszedł do wzoru (2) **P. Najman**). Rozstrzygnięcie, dla jakich n wartość p_n spadnie poniżej 0,5, zostało przez wszystkich (łącznie z firmówką) pozostawione maszynie; wynik: $\min n = 208$.

Można było zajmować się wyłącznie ciągiem (c_n), z zależnością (1) i pytaniem: $c_n < 0,5 \cdot 24^n$ (?), bez przechodzenia do postaci (2). To by prowadziło do badania dużych liczb całkowitych – za dużych (w przeświadczeniu redaktora ligi), by nad zagadnieniem zapanować. Tym większe było redaktora radosne zaskoczenie, gdy w dwóch pracach (**J. Fiett**, **M. Miodek**) znalazł wartości c_{207}, c_{208} wydrukowane *in extenso*! Niech i nasi Czytelnicy trochę tej uciechy mają:

$$\begin{aligned} c_{207} = {} & 253510478116989667286069556112239483966686696087778708186081\\ & 241005457086185875947576983665148084284804983929373835070160\\ & 456915245509527032465634911491404779725578425599190252059531\\ & 236220647978264714330381942130166515018490948673294755506983\\ & 6010258379841748909914188149028725759669801930, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{208} = {} & 606390531917155388638659541205594709872002372899953774685779\\ & 132318477871720723344069954785179879991382257774972929493109\\ & 088401396406576820414785954097915904743731483512534464549112\\ & 457438179568399783955501282839841176163110541645599079981093\\ & 49296470060622232450152310425551499093489341202. \end{aligned}$$

Zadanie **678** [Czy istnieją różne liczby pierwsze p, q, r: $p \mid 2^{q-1}-1$, $q \mid 2^{r-1}-1$, $r \mid 2^{p-1}-1$?] ($WT = 2{,}13$; $LPR = 10$). Tu redaktor ligi ewidentnie zawinił niefrasobliwością – zadanie poznał był wraz z rozwiązaniem (które podał jako firmowe) – był wszelako zbyt leniwy, żeby samemu, prościutkim programem, poszukać takich trójek. A istnieje ich mnóstwo (i znajduje się je bez problemu); **Michał Miodek** wydrukował przeszło sto trójek! Wśród przykładów podawanych przez uczestników najczęściej powtarzała się trójka $(19, 37, 73)$, jedyna składająca się z samych liczb dwucyfrowych (oraz realizująca $\min(p+q+r)$).

Przypomnijmy, że w rozwiązaniu firmowym (autor zadania: **Witold Bednarek**) zostało wykazane, że jeśli s jest liczbą pierwszą, dla której $2^s - 1$ ma co najmniej trzy różne dzielniki pierwsze $p < q < r$, to trójka (p, q, r) spełnia wymagane warunki, bowiem każda z liczb $2^{t-1} - 1$ $(t = p, q, r)$ dzieli się przez pqr; wykładnik $s = 29$ generuje w ten sposób trójkę „firmową", złożoną z liczb 3- i 4-cyfrowych. Uzyskana teza (pqr – wspólny dzielnik trzech liczb) jest o wiele mocniejsza niż własność postulowana w zadaniu.

Dokładnie to samo rozumowanie, z tak wzmocnioną tezą (i z tym samym przykładem liczbowym) przedstawił jeden uczestnik: **Jędrzej Garnek**. Teraz, po refleksji, widać, że w tej ambitniejszej wersji zadanie byłoby znacznie lepsze; i zostałoby zrobione przez co najmniej jednego uczestnika; ciekawe, przez ilu…

Zadanie **682** [$x_1, \ldots, x_n > 0$; $\sum 1/(1+x_i) = 1 \Rightarrow \sum \sqrt{x_i} \geqslant (n-1) \sum \sqrt{1/x_i}$] ($WT = 2{,}29$; $LPR = 11$). Niestety, zadanie okazało się znane. Pojawiło się (m.in.) na konkursie: V. Jarník Intl. Math. Competition (2002), z oficjalnym rozwiązaniem (jak nasze firmowe) przez nierówność Czebyszewa dla ciągów przeciwnie monotonicznych; część uczestników powołała się na to źródło. Rozwiązanie oparte na tym samym pomyśle znaleźli niezależnie: **S. Bednarek**, **J. Garnek**, **P. Duch**.

Przyjmując liczby $a_i = 1/(1+x_i)$ jako nowe zmienne można było przemodelować zadaną nierówność do postaci

$$(3) \qquad \sum \sqrt{\frac{1-a_i}{a_i}} \geqslant (n-1) \sum \sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}}$$

$$\text{gdy } a_i > 0,\ \sum a_i = 1.$$

Janusz Olszewski pokazał, że pomiędzy lewą i prawą stronę (3) można włożyć wyrażenie $\frac{1}{\sqrt{n-1}} \sum_{i \neq j} \sqrt{a_i/a_j}$: dwie części tak powstałej tezy okazują się być konsekwencją nierówności, wiążących średnie: kwadratową, arytmetyczną i harmoniczną liczb $\sqrt{a_i}$.

Jeszcze bardziej zmyślnie, bez wprowadzania zmiennych a_i, postąpił **Grzegorz Więch**. Oznaczając przez Q, A, H średnie (kwadratową, arytmetyczną, harmoniczną) liczb $\sqrt{1/x_i}$, zapisujemy tezę zadania w formie $(n-1)AH \leqslant 1$; skoro $A \leqslant Q$, $H \leqslant Q$, wystarczy wykazać, że $Q^{-2} \geqslant n-1$. Ale Q^{-2} to po prostu średnia harmoniczna liczb x_i; jej dolne ograniczenie przez $n-1$ łatwo uzyskać z warunku $\sum 1/(1+x_i) = 1$.

Jerzy Cisło przekształcił (3) do postaci $\sum f(a_i) \geqslant 0$, gdzie $f(t) = (1-nt)/\sqrt{t(1-t)}$ ($a_i > 0$, $\sum a_i = 1$) i udowodnił tę tezę, szacując oddzielnie dwa fragmenty badanej sumy – w przedziałach, gdzie funkcja f jest wypukła bądź wklęsła. Najprościej zaś poradził sobie z nierównością (3) **Tomasz Wietecha**, odsyłając do książki: L. Kourliandtchik *Powrót do krainy nierówności*, gdzie na stronach 53–55 twierdzenie (3) jest udowodnione. No cóż…