Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2015

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 683 ($WT = 2{,}48$) i 684 ($WT = 1{,}67$) z numeru 6/2014

Jerzy Cisło	Wrocław	43,59
Tomasz Wietecha	Tarnów	42,14
Michał Miodek	Zawiercie	40,49
Wojciech Maciak	Warszawa	39,65
Wojciech Tobiś	Praszka	34,67
Piotr Kumor	Olsztyn	33,09
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	32,75

Zadania z matematyki nr 693, 694

Redaguje Marcin E. KUCZMA

693. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste niewymierne x, dla których każda z liczb $x^2 - 44x$ oraz $x^3 - 2015x$ jest wymierna.

694. Niech $a(n)$ oznacza odległość liczby naturalnej n od najbliższej liczby, będącej pełnym kwadratem: $a(n) = \min\{|n-k^2| : k \in \mathbb{N}\}$, i niech $S(n) = a(1) + \ldots + a(n)$ oraz $f(n) = \frac{1}{n}S(n)$. Udowodnić, że każda dodatnia liczba całkowita występuje w ciągu $f(1), f(2), f(3), \ldots$ dokładnie trzykrotnie.

Zadanie 694 zaproponował pan Przemysław Grabowski z Goworowa

Rozwiązania zadań z numeru 9/2014

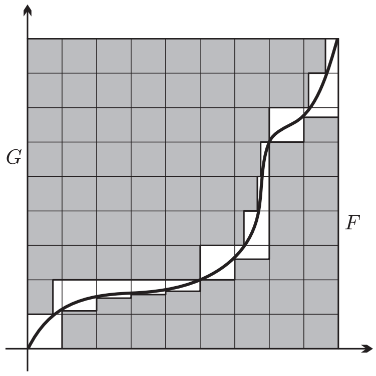
Przypominamy treść zadań:

685. Niech $I = \langle 0;1\rangle$. Funkcje $f, g : I \to I$ spełniają warunki: f jest ściśle rosnąca, $f(g(x)) = x$ dla $x \in I$. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) + g\left(\frac{k}{n}\right)\right) < n - \frac{1}{n}.$$

686. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n, dla których równanie $x^2 + y^2 = n$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych x, y, różnych od zera, ale ma rozwiązania w liczbach wymiernych x, y, różnych od zera.

685. Z podanych warunków wynika od razu, że f jest różnowartościowym odwzorowaniem przedziału I na cały ten sam przedział. Ma więc funkcję odwrotną; a skoro $f(g(x)) = x$, zatem funkcja g jest tą odwrotną do f. (Łatwo uzasadnić ciągłość obu funkcji – ale ta wiedza nie będzie tu potrzebna).



Dalszy ciąg rozumowania to starogreckie „patrz(!)". Rysunek przedstawia wykres (przykładowej) funkcji f, leżący w kwadracie K, którego dwoma bokami są odcinki $\langle 0;1\rangle$ na poziomej i pionowej osi układu współrzędnych. *Ta sama krzywa* jest też wykresem funkcji g, gdy przyjmiemy, że (rozważając g) odkładamy zmienną niezależną na osi pionowej, a zależną na poziomej.

Niech F będzie wielokątem powstałym z połączenia $n-1$ prostokątów, których podstawami są odcinki $\left\langle \frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right\rangle$ osi poziomej ($k = 1, \ldots, n-1$), a wysokości wynoszą kolejno $f\left(\frac{1}{n}\right), \ldots, f\left(\frac{n-1}{n}\right)$. Analogicznie tworzymy wielokąt G, rozważając funkcję g i zamieniając role osi współrzędnych.

Wielokąty F i G są (prawie) rozłączne – mogą mieć wspólne jedynie niektóre wierzchołki. Uzasadnienie: jeśli punkt (a,b) należy do F, to znaczy, że dla pewnego k zachodzą nierówności $\frac{k}{n} \leqslant a \leqslant \frac{k+1}{n}$, $b \leqslant f\left(\frac{k}{n}\right)$; jeżeli ten sam punkt należy do G, to dla pewnego l mamy $\frac{l}{n} \leqslant b \leqslant \frac{l+1}{n}$, $a \leqslant g\left(\frac{l}{n}\right)$; stąd

$$b \leqslant f\left(\tfrac{k}{n}\right) \leqslant f(a) \leqslant f\left(g\left(\tfrac{l}{n}\right)\right) = \tfrac{l}{n} \leqslant b, \quad \text{więc} \quad a = \tfrac{k}{n},\ b = \tfrac{l}{n}.$$

Zauważmy wreszcie, że kwadracik o boku $1/n$, mający wierzchołek w punkcie $(0,0)$, nie ma punktów wspólnych ani z wielokątem F, ani z G. Po jego usunięciu z kwadratu K pozostaje figura o polu $1 - 1/n^2$; figury F i G są w niej zawarte, ale nie wypełniają jej szczelnie, skoro nie mają wspólnych fragmentów boków (poza wierzchołkami).

Pole wielokąta F wynosi $\frac{1}{n}\sum_{k<n} f\left(\frac{k}{n}\right)$; pole G wynosi $\frac{1}{n}\sum_{k<n} g\left(\frac{k}{n}\right)$. Suma tych pól jest mniejsza niż $1 - 1/n^2$. Mnożymy uzyskaną nierówność przez n i mamy tezę zadania.

(Stała $1 - 1/n^2$ jest optymalna; nierówność staje się bliska równości, gdy wykres funkcji f zbliża się do odpowiednio dobranej linii łamanej, utworzonej z odcinków poziomych i pionowych).

686. Postulowaną własność mają na przykład wszystkie liczby postaci $n = 4^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Żadna z nich nie jest sumą dwóch niezerowych kwadratów; przypuśćmy bowiem, że $4^k = x^2 + y^2$ ($xy \neq 0$); liczby x, y nie mogą być obie nieparzyste (bo wówczas $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 4$); muszą więc być parzyste, co daje przedstawienie liczby 4^{k-1} w postaci sumy dwóch niezerowych kwadratów. Dalsze zstępowanie prowadzi do konkluzji, że 4 jest sumą dwóch niezerowych kwadratów – a to absurd.

Natomiast niezerowe wymierne rozwiązanie równania $x^2 + y^2 = 4^k$ łatwo uzyskamy, biorąc dowolną trójkę pitagorejską liczb naturalnych a, b, c ($a^2 + b^2 = c^2$) i przyjmując $x = 2^k a/c$, $y = 2^k b/c$.

Rozwiązanie zadania M 1445.
Gdyby było $f(x) > 1$ dla pewnego x, to wstawiając $y = \dfrac{x}{f(x)-1}$, mielibyśmy

$$f(x)\cdot f\left(\frac{x\cdot f(x)}{f(x)-1}\right) = f\left(x\cdot\frac{f(x)}{f(x)-1}\right),$$

skąd $f(x) = 1$ – sprzeczność. Zatem $f(x) \leqslant 1$ dla każdego x, więc

$$f(x+y) = f(x)\cdot f(y\cdot f(x)) \leqslant f(x),$$

co oznacza, że f jest nierosnąca.