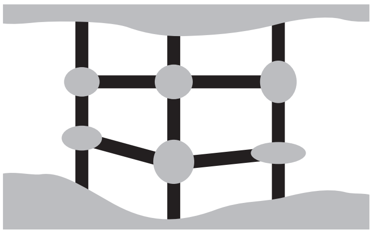
Wzdłuż czy w poprzek?

Joanna JASZUŃSKA

Oto dwa zupełnie niepodobne zadania, które można rozwiązać w zaskakująco podobny sposób. W obydwu przypadkach rozwiązanie okazuje się znacznie prostsze, niż można by się w pierwszej chwili spodziewać.

1. Na pewnej rzece jest 6 wysp i 13 mostów zwodzonych, jak na rysunku 1. Każdy z mostów jest podniesiony z prawdopodobieństwem 1/2. Jakie jest prawdopodobieństwo, że da się przejść z jednego brzegu rzeki na drugi?



Rys. 1

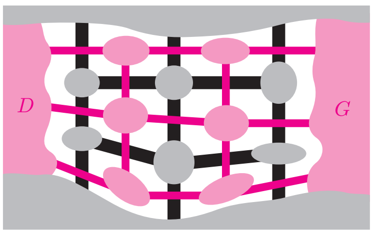
2. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in (0,1)$ oraz dowolnych dodatnich liczb całkowitych n, k zachodzi nierówność

$$(1-x^k)^n + (1-(1-x)^n)^k \geqslant 1.$$

Rozwiązania

R1. Niech C oznacza zdarzenie: *da się przejść pomiędzy brzegami rzeki.* Poszukujemy $\mathbb{P}(C)$, czyli prawdopodobieństwa tego zdarzenia.

Wyobraźmy sobie, że rzeką płynie statek o wysokim maszcie, który nie zmieści się pod opuszczonymi mostami. Na rysunku 2 kolorem oznaczono „obszary" wodne i połączenia pomiędzy nimi. Zauważmy, że ta część rysunku obrócona o 90° wygląda tak samo, jak część czarno-szara (ilustrująca potencjalne drogi pieszego). Co więcej, w obu przypadkach każdy most jest w „sprzyjającej" pozycji z takim samym prawdopodobieństwem, równym 1/2.



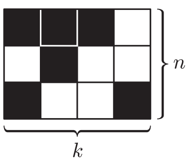
Rys. 2

Niech S oznacza zdarzenie: *statek może przepłynąć pomiędzy punktami D i G.* Wobec powyższej obserwacji, $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(C)$.

Jeśli człowiek może przejść pomiędzy brzegami rzeki, czyli są one połączone pewną drogą prowadzącą przez mosty i wyspy, to statek nie może przepłynąć wzdłuż rzeki. Analogicznie, jeśli człowiek nie może przejść, to brzegi nie są połączone, co oznacza, że istnieje linia, która je rozdziela i statek może taką właśnie trasą przepłynąć.

Stąd wniosek, że zawsze zachodzi dokładnie jedno spośród zdarzeń C i S, czyli są to zdarzenia przeciwne. Zatem $\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(S) = 1$, więc wobec wcześniejszej obserwacji, że $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(C)$, uzyskujemy wynik $\mathbb{P}(C) = 1/2$. $\square$

R2. Rozważmy szachownicę o n wierszach i k kolumnach, której każde pole pomalowano na czarno z prawdopodobieństwem x, a z prawdopodobieństwem $1-x$ pozostawiono białe (rys. 3). Prawdopodobieństwo, że wybrany wiersz jest cały czarny jest wówczas równe x^k (bo każde z k pól musi być czarne), więc prawdopodobieństwo, że istnieje w nim białe pole wynosi $1-x^k$.



Rys. 3. Przykład dla $n = 3$, $k = 4$.

Niech B oznacza zdarzenie: *w każdym wierszu jest co najmniej jedno białe pole.* Wierszy jest n; wobec powyższej obserwacji $\mathbb{P}(B) = (1-x^k)^n$. Analogicznie niech C oznacza zdarzenie: *w każdej kolumnie istnieje pole czarne*, wówczas $\mathbb{P}(C) = (1-(1-x)^n)^k$.

Jeśli nie zachodzi zdarzenie B, czyli nie jest prawdą, że w każdym wierszu jest białe pole, to istnieje wiersz o wszystkich polach czarnych. Wtedy na pewno w każdej kolumnie jest czarne pole (choćby z tego właśnie wiersza), czyli zachodzi zdarzenie C. Wobec tego zawsze zachodzi co najmniej jedno spośród zdarzeń B i C, stąd $\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \geqslant 1$, czyli $(1-x^k)^n + (1-(1-x)^n)^k \geqslant 1$. $\square$

Jak widać na rysunku 3, zdarzenia B i C mogą zachodzić jednocześnie.

Zadanie domowe

3. Dane są dodatnie liczby całkowite n, k oraz takie nieujemne liczby rzeczywiste x_i, y_i, że $x_i + y_i = 1$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, k$. Wykaż, że zachodzi nierówność

$$(1 - x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_k)^n + (1-y_1^n)(1-y_2^n)\cdot \ldots \cdot (1-y_k^n) \geqslant 1.$$