Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2014

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 677 ($WT = 1{,}51$) i 678 ($WT = 2{,}13$) z numeru 3/2014

Paweł Duch	Bielawa	40,84
Wojciech Maciak	Warszawa	39,65
Stanisław Bednarek	Łódź	39,50
Tomasz Wietecha	Tarnów	38,00
Michał Miodek	Zawiercie	35,31
Jerzy Cisło	Wrocław	34,05
Wojciech Tobiś	Praszka	32,96
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	32,75

Zadania z matematyki nr 687, 688

Redaguje Marcin E. KUCZMA

687. Dowieść, że wśród dowolnie wybranych 39 kolejnych liczb naturalnych znajdzie się liczba, której suma cyfr dzieli się przez 11.

688. Trójkąt równoboczny ABC o boku długości 1 jest podstawą ostrosłupa prawidłowego $ABCS$. Na krawędziach SA, SB, SC leżą takie punkty X, Y, Z, że suma kwadratów pól trójkątów SXY, SYZ, SZX jest równa kwadratowi pola trójkąta XYZ. Obliczyć objętość ostrosłupa $ABCS$.

Zadanie 688 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2014

Przypominamy treść zadań:

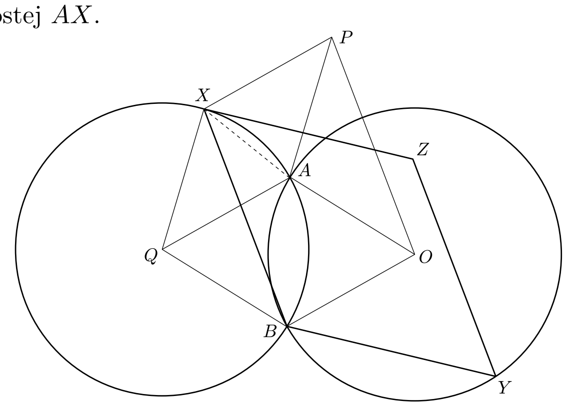
683. Dane są dwa przystające okręgi, przecinające się w punktach A i B. Punkt X leży na jednym z tych okręgów, punkt Y na drugim, przy czym prosta XY nie przechodzi ani przez A, ani przez B, ani przez środek odcinka AB. Punkt Z jest wierzchołkiem równoległoboku $XBYZ$. Dowieść, że okręgi opisane na trójkątach AXZ, AYZ są przystające do dwóch danych okręgów.

684. Wykazać, że dla żadnej pary różnych liczb pierwszych p, q układ równań

$$a^2 + b^2 = p, \qquad x^2 + y^2 = q, \qquad (a-x)^2 + (b-y)^2 = |p-q|$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych a, b, x, y.

683. To zadanie o równoległobokach. Oznaczmy środek okręgu (ABY) przez O, środek okręgu (ABX) przez Q, i niech P będzie punktem symetrycznym do Q względem prostej AX.



Czworokąty $QAPX$ i $QAOB$ są rombami. Zatem

$$|PX| = |AQ| = |OB| \quad \text{oraz} \quad PX \parallel AQ \parallel OB,$$

skąd wniosek, że czworokąt $XBOP$ jest równoległobokiem. Również czworokąt $XBYZ$ jest (z założenia) równoległobokiem. Stąd – jak przed chwilą – wnosimy, że równoległobokiem jest także czworokąt $POYZ$. Wobec tego $|PZ| = |OY|$.

Ta równość, wraz z poprzednią uwagą o rombie $QAPX$, pokazuje, że odległość punktu P od każdego z trójki punktów Z, A, X jest równa promieniowi dwóch danych okręgów. Inaczej mówiąc, P jest środkiem okręgu przystającego do nich i przechodzącego przez punkty Z, A, X; to jest pierwsza część tezy. Druga część tezy, dotycząca okręgu opisanego na trójkącie AYZ, wynika z pierwszej przez symetrię (logiczną).

684. Przypuśćmy, że liczby p, q oraz a, b, x, y spełniają podane warunki. Można przyjąć, że $p > q$. Odejmując pierwsze równanie od drugiego i uwzględniając równanie trzecie, dostajemy związek $ax + by = x^2 + y^2$, czyli

$$(1) \qquad x(a-x) + y(b-y) = 0.$$

Skoro suma $x^2 + y^2 = q$ jest liczbą pierwszą, zatem liczby x, y są względnie pierwsze i żadna z nich nie jest zerem. Z równania (1) wynika teraz, że x jest dzielnikiem różnicy $b - y$, zaś y jest dzielnikiem różnicy $a - x$. Tak więc $b - y = kx$, $a - x = ly$ dla pewnych liczb całkowitych k, l. Po podstawieniu do równania (1) mamy $xy(k+l) = 0$. Ale $xy \neq 0$, więc $l = -k$, i dalej:

$$b = kx + y, \qquad a = x + ly = x - ky$$

oraz

$$p = a^2 + b^2 = (x-ky)^2 + (kx+y)^2 = \\ = (k^2+1)(x^2+y^2) = (k^2+1)q.$$

Dla liczby pierwszej p taka równość zachodzić nie może. Sprzeczność dowodzi, że liczby o podanych własnościach nie istnieją.

(Rezultat tego zadania ma ciekawą interpretację: nie istnieje trójkąt prostokątny o wierzchołkach w punktach kratowych płaszczyzny, w którym kwadraty długości dwóch boków – przeciwprostokątnej i jednej przyprostokątnej – byłyby liczbami pierwszymi).