LXVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

30 września 2014 r. – I seria,
3 listopada 2014 r. – II seria,
1 grudnia 2014 r. – III seria

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego:
  Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk.
- Dla województwa śląskiego:
  Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.
- Dla województwa małopolskiego:
  Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.
- Dla województwa lubelskiego:
  Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin.
- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:
  Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.
- Dla województwa wielkopolskiego:
  Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań.
- Dla województwa podkarpackiego:
  Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Katedra Matematyki Politechniki Rzeszowskiej, al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów.
- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:
  Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.
- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:
  Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.
- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:
  Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.
- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:
  Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria
(1 września 2014 r. –
– 30 września 2014 r.)

1. Dane są takie liczby całkowite a, b i c różne od zera, że liczba
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$
jest całkowita. Wykazać, że iloczyn abc jest sześcianem liczby całkowitej.

2. Dodatnie liczby całkowite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają warunek
$$x_1+x_2+\ldots+x_n=s<2n.$$
Udowodnić, że każda liczba ze zbioru $\{1,2,\ldots,s\}$ jest sumą pewnych spośród liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

3. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita $n \geqslant 1$, że liczba
$$\sqrt[n]{\sqrt{2}+1}+\sqrt[n]{\sqrt{2}-1}$$
jest wymierna.

4. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB \neq AC$. Punkty E i F są spodkami wysokości tego trójkąta opuszczonych odpowiednio z wierzchołków B i C. Punkty M i N są środkami odpowiednio odcinków BC i EF, a punkt Q jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie AMN. Dowieść, że proste AQ i BC są równoległe.

II seria
(1 października 2014 r. –
– 3 listopada 2014 r.)

5. Rozwiązać w liczbach całkowitych x i y równanie
$$x^4-2x^3+x=y^4+3y^2+y.$$

6. Dany jest trójkąt ABC, w którym kąt przy wierzchołku C jest prosty. Punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C, a okrąg wpisany w dany trójkąt jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach E i F. Wykazać, że punkt przecięcia wysokości trójkąta AEF jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD.

7. Dany jest czworościan $ABCD$. Płaszczyzna przechodząca przez punkty styczności sfery s wpisanej w ten czworościan ze ścianami ABD, BCD i ACD przecina krawędzie AD, BD i CD odpowiednio w punktach A', B' i C'. Udowodnić, że środek sfery wpisanej w czworościan $A'B'C'D$ leży na sferze s.

8. Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ wyznaczyć najmniejszą liczbę całkowitą k o następującej własności:
Wśród dowolnych k różnych podzbiorów zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ mających parzystą liczbę elementów istnieją dwa różne podzbiory, których część wspólna ma parzystą liczbę elementów.

III seria
(4 listopada 2014 r. –
– 1 grudnia 2014 r.)

9. Nieujemne liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 2)$ spełniają równość $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$. Udowodnić, że
$$\max\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}\cdot\Big(1+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\min\{x_i,x_j\}\Big)\geqslant 1.$$

10. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a, b, c i d, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $an+b$ jest podzielna przez liczbę $cn+d$. Wykazać, że istnieje liczba naturalna k, dla której $a=kc$ i $b=kd$.

11. Dany jest trójkąt ABC, w którym $BC<CA<AB$. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E i F, a punkty K, L i M są środkami odpowiednio boków BC, CA i AB. Proste DE i KL przecinają się w punkcie P, a proste DF i KM – w punkcie Q. Dowieść, że punkty A, P i Q leżą na jednej prostej.

12. Na płaszczyźnie zaznaczono wierzchołki 2014-kąta foremnego. Dwaj gracze na przemian dorysowują nowy bok albo nową przekątną tego wielokąta. Gracz przegrywa grę, jeżeli po jego ruchu dla każdego wierzchołka v dowolne dwa spośród pozostałych wierzchołków można połączyć łamaną złożoną z narysowanych odcinków, nie przechodzącą przez wierzchołek v. Rozstrzygnąć, który z graczy – rozpoczynający grę czy jego przeciwnik – ma strategię wygrywającą.