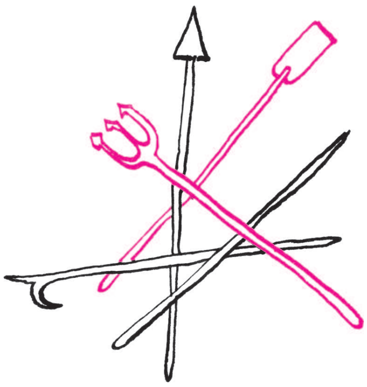
Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2014

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 675 ($WT = 2{,}29$) i 676 ($WT = 1{,}94$) z numeru 2/2014

Andrzej Idzik	Bolesławiec	44,04
Paweł Duch	Bielawa	40,84
Wojciech Maciak	Warszawa	39,65
Stanisław Bednarek	Łódź	39,50
Tomasz Wietecha	Tarnów	34,36
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	32,75

Pan Andrzej Idzik, znany Czytelnikom *Delty* z różnych form aktywności, zamyka swoją drugą rundę.



Zadania z matematyki nr 685, 686

Redaguje Marcin E. KUCZMA

685. Niech $I = \langle 0; 1\rangle$. Funkcje $f, g : I \to I$ spełniają warunki: f jest ściśle rosnąca, $f(g(x)) = x$ dla $x \in I$. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) + g\left(\frac{k}{n}\right)\right) < n - \frac{1}{n}.$$

686. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n, dla których równanie $x^2 + y^2 = n$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych x, y, różnych od zera, ale ma rozwiązania w liczbach wymiernych x, y, różnych od zera.

Zadanie 686 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa

Rozwiązania zadań z numeru 5/2014

Przypominamy treść zadań:

681. Mamy dwa stosy bierek. Dwaj gracze wykonują ruchy na przemian. W jednym ruchu wolno: usunąć jedną bierkę (z dowolnie wybranego stosu); usunąć po jednej bierce z obu stosów; przełożyć jedną bierkę z jednego (dowolnego) stosu na drugi. Gra kończy się, gdy wszystkie bierki znikną. Wygrywa gracz, który zdjął ostatnią bierkę. W zależności od liczności stosów w stanie początkowym, ustalić, czy i który z graczy (rozpoczynający czy jego przeciwnik) ma strategię wygrywającą.

682. Liczby dodatnie $x_1, \ldots, x_n$ spełniają warunek

$$\frac{1}{1+x_1} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} = 1.$$

Udowodnić, że

$$\frac{\sqrt{x_1} + \ldots + \sqrt{x_n}}{n-1} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{x_n}}.$$

681. Gdy na każdym stosie leży parzysta liczba bierek, wówczas każdy ruch powoduje, że liczność co najmniej jednego stosu stanie się nieparzysta. Z takiej sytuacji można jednym ruchem ponownie uzyskać stan: obie liczności parzyste. Można przy tym wybrać taki ruch, który zmniejsza łączną liczbę bierek w obu stosach (jedyny typ ruchu, który tego nie robi, to przełożenie bierki ze stosu na drugi – ale wtedy ten sam efekt parzystości można uzyskać, zdejmując po jednej bierce z obu stosów).

Stąd wynika, że stany typu *obie parzyste* to pozycje przegrywające; pozostałe pozycje są wygrywające. Istotnie, ze stanu pierwszego typu każdy ruch prowadzi do stanu drugiego typu; stąd zaś istnieje ruch, przywracający stan *obie parzyste* i zmniejszający łączną liczność (co gwarantuje, że gra się zakończy).

Dostajemy odpowiedź: gracz rozpoczynający ma strategię zwycięską wtedy i tylko wtedy, gdy na starcie liczba bierek w co najmniej jednym stosie jest nieparzysta.

682. Można przyjąć, że $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Nierówność daną do udowodnienia przepisujemy w równoważnej postaci

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{x_i} + \frac{1}{\sqrt{x_i}}\right) \geqslant n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_i}}.$$

Lewa strona nie zmieni się, gdy ją pomnożymy przez liczbę 1, zapisaną (zgodnie z założeniem) jako suma odwrotności liczb $x_i + 1$:

$$(*)\qquad \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{x_i} + \frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+1}\right) \geqslant n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_i}}.$$

Wystarczy teraz wykazać, że ciągi $(a_1, \ldots, a_n)$ i $(b_1, \ldots, b_n)$ o wyrazach

$$a_i = \sqrt{x_i} + \frac{1}{\sqrt{x_i}} = \frac{x_i+1}{\sqrt{x_i}}, \qquad b_i = \frac{1}{x_i+1}$$

są odwrotnie uporządkowane; nierówność Czebyszewa $\left(\sum a_i\right)\left(\sum b_i\right) \geqslant n\sum a_ib_i$ da wówczas dowodzoną tezę $(*)$.

Przyjęliśmy, że $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, więc ciąg (b_i) jest nierosnący; chcemy pokazać, że ciąg (a_i) jest niemalejący. Funkcja $f(x) = x^{1/2} + x^{-1/2}$ maleje w przedziale $(0; 1\rangle$ oraz rośnie w przedziale $\langle 1; \infty)$. Zatem fragment ciągu (x_i), który leży w przedziale $\langle 1; \infty)$, wyznacza niemalejący fragment ciągu o wyrazach $a_i = f(x_i)$. Skoro jednak $\sum b_i = 1$, to w przedziale $(0; 1\rangle$ może leżeć co najwyżej jeden wyraz ciągu (x_i), czyli liczba x_1. Pozostaje dowieść, że wówczas $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Z założenia $\sum b_i = 1$, więc $b_1 + b_2 \leqslant 1$, skąd (po prostym przekształceniu) $x_1x_2 \geqslant 1$. Stąd, ostatecznie,

$$f(x_2) - (x_1) = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1}} =$$
$$= \left(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x_1x_2}}\right) \geqslant 0.$$

To kończy dowód nierówności $(*)$, równoważnej z tezą zadania.