Klub 44

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 673 ($WT = 1{,}64$) i 674 ($WT = 2{,}94$) z numeru 1/2014

Jędrzej Garnek	Poznań	47,96
Janusz Olszewski	Warszawa	45,91
Andrzej Idzik	Bolesławiec	42,10
Paweł Duch	Bielawa	40,84
Wojciech Maciak	Warszawa	39,65
Stanisław Bednarek	Łódź	37,56
Tomasz Wietecha	Tarnów	34,36
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	32,75

Pan Jędrzej Garnek – już po raz drugi. Zaś Janusz Olszewski stanie oto i za pięciu Weteranów.

Rozwiązania zadań z numeru 4/2014

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

679. Na okręgu wybrano skończoną liczbę punktów i niektóre z nich oznaczono kolorem białym, a pozostałe czerwonym, tak, że punktów białych jest przeszło dwukrotnie więcej niż czerwonych. Dowieść, że istnieje taki punkt biały, że każdy łuk okręgu, mający koniec w tym punkcie, zawiera więcej punktów białych niż czerwonych.

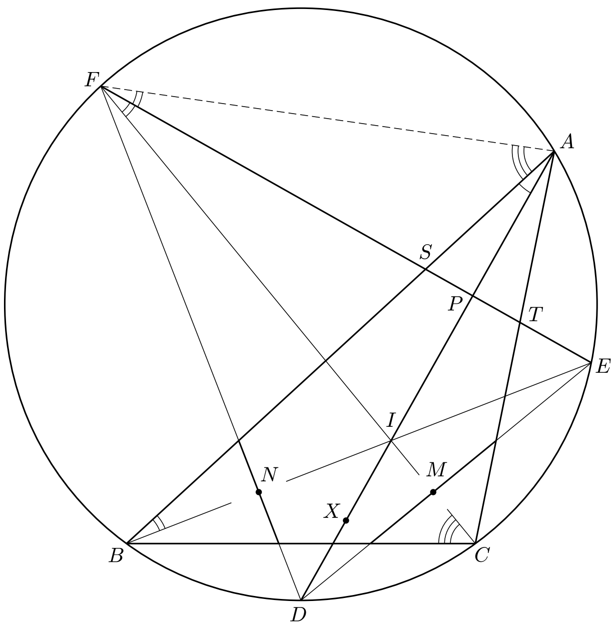
680. Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta ABC przecinają okrąg na nim opisany odpowiednio w punktach D, E, F. Odcinki prostych DE i DF, wyznaczone przez punkty przecięcia tych prostych z bokami trójkąta, mają środki w punktach M i N. Odcinki AD i EF przecinają się w punkcie P. Wykazać, że środek okręgu, przechodzącego przez punkty D, M, N, leży na okręgu, przechodzącym przez punkty P, M, N.

679. Jeżeli wszystkie wybrane punkty są białe, nie ma czego dowodzić. Przyjmijmy więc, że tak nie jest. Ustalmy kierunek obiegu (orientację) okręgu; każdy łuk ma wtedy początek i koniec.

Punkt biały nazwijmy *fajnym*, jeżeli każdy łuk okręgu, mający początek w tym punkcie, zawiera więcej punktów białych niż czerwonych. Wybierzmy dowolną parę punktów sąsiadujących, różnych kolorów, w której punkt biały jest wcześniejszy niż punkt czerwony (bezpośrednio go poprzedza). Usuńmy tę parę. Zauważmy, że wszystkie białe punkty, które nie były fajne, pozostają niefajnymi w nowej sytuacji.

Powtarzamy to postępowanie, dopóki czerwone punkty nie znikną. Przyjmijmy, że na starcie było b punktów białych oraz c czerwonych. Po wykonaniu c ruchów zostaje $b - c$ punktów, wszystkie białe, oczywiście fajne (w tej końcowej sytuacji). One zatem były fajne już na starcie; oznaczmy ich zbiór przez B.

Zmieniamy orientację i powtarzamy rozumowanie. Otrzymujemy zbiór B', złożony z $b - c$ białych punktów, które już na starcie były „fajne przy zmienionej orientacji". Dla uzyskania tezy zadania należy wykazać, że pewien punkt biały znajduje się w części wspólnej zbiorów B i B'. Do tego wystarczy, żeby zachodziła nierówność $2(b - c) > b$, czyli $b > 2c$, a to jest dane w założeniu.



680. Oznaczmy przez α, β, γ miary kątów trójkąta ABC przy wierzchołkach A, B, C, zaś przez S, T punkty przecięcia odcinka EF odpowiednio z bokami AB, AC. Odcinki AD, BE, CF przecinają się w punkcie I (środku okręgu wpisanego). Z równości

$$|\sphericalangle BAD| = \alpha/2,$$
$$|\sphericalangle AFE| = |\sphericalangle ABE| = \beta/2,$$
$$|\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle BCF| = \gamma/2$$

wynika, że w trójkącie APF kąty przy wierzchołkach A i F sumują się do kąta prostego. Zatem kąt przy wierzchołku P jest prosty. W trójkącie AST odcinek AP jest więc jednocześnie dwusieczną i wysokością; to znaczy, że punkt P jest środkiem odcinka ST.

Skoro $AP \perp PF$, równość

$$|\sphericalangle CFE| = |\sphericalangle CBE| = \beta/2 = |\sphericalangle AFE|$$

pokazuje, że prosta EF jest symetralną odcinka AI. Przez analogię, punkty M i N są środkami odcinków CI i BI, a proste DE i DF są symetralnymi tych odcinków. W takim razie jednokładność o środku I i skali $1/2$ przekształca trójkąt ABC na trójkąt PNM.

Okrąg opisany na pierwszym z tych trójkątów przechodzi na okrąg opisany na drugim. Obrazem punktu D jest środek X odcinka ID, który wobec tego leży na okręgu (PNM). Pozostaje zauważyć, że punkt X, jako środek przeciwprostokątnej trójkątów prostokątnych IMD, IND, jest też środkiem okręgu (DMN).