Klub 44

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 671 ($WT = 1{,}69$) i 672 ($WT = 1{,}66$) z numeru 12/2013

Jędrzej Garnek	Poznań	43,38
Janusz Olszewski	Warszawa	41,33
Paweł Duch	Bielawa	40,18
Andrzej Idzik	Bolesławiec	39,87
Wojciech Maciak	Warszawa	39,65
Stanisław Bednarek	Łódź	35,92
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	32,75
Tomasz Wietecha	Tarnów	32,72

Rozwiązania zadań z numeru 3/2014

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

677. Rozważamy trójki liczb rzeczywistych (x, y, z), spełniające warunki

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} \quad \text{oraz} \quad x^2 + y^2 + z^2 > yz + zx + xy.$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości iloczynu xyz.

678. Czy istnieją takie trzy różne liczby pierwsze p, q, r, że liczba $2^{q-1} - 1$ dzieli się przez p, liczba $2^{r-1} - 1$ dzieli się przez q, zaś liczba $2^{p-1} - 1$ dzieli się przez r?

677. Liczby x, y, z muszą być różne od zera. Przepisujemy pierwsze równanie jako $yz(x - y) = y - z$, i dalej (cyklicznie)

$$(1) \qquad yz(x-y) = y - z, \qquad zx(y-z) = z - x, \qquad xy(z-x) = x - y.$$

Mnożymy stronami:

$$(2) \qquad (xyz)^2(x-y)(y-z)(z-x) = (y-z)(z-x)(x-y).$$

Gdyby któraś z różnic $x - y$, $y - z$, $z - x$ była zerem, to wobec zależności (1) wszystkie byłyby zerami, czyli liczby x, y, z byłyby równe. To się jednak kłóci z nierównością, daną w założeniach. Różnice te są więc różne od zera. Równanie (2) po skróceniu daje wynik: $(xyz)^2 = 1$; jedynymi możliwymi wartościami iloczynu xyz są liczby 1 oraz -1. Każda z nich jest faktycznie osiągalna – na przykład dla $(x, y, z) = (1, -\frac{1}{2}, -2)$ oraz $(x, y, z) = (-1, \frac{1}{2}, 2)$.

678. Zadanie zaproponował najstarszy stażem ligowiec Witold Bednarek – całe szczęście, że wraz z rozwiązaniem. Zobaczmy je:

Przypuśćmy, że dla pewnej liczby pierwszej s liczba $2^s - 1$ ma co najmniej trzy różne dzielniki pierwsze p, q, r. Wykażemy, że wówczas trójka p, q, r spełnia postulowane warunki.

Niech δ będzie najmniejszym wykładnikiem naturalnym, większym od 1, dla którego $2^\delta \equiv 1 \pmod{p}$. Z założenia także $2^s \equiv 1$, więc s dzieli się przez δ; a skoro s jest liczbą pierwszą, to $\delta = s$. W myśl małego twierdzenia Fermata $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, zatem $p - 1$ dzieli się przez δ, czyli przez s.

Analogicznie stwierdzamy, że s jest dzielnikiem liczb $q - 1$ oraz $r - 1$. Podnosząc kongruencję $2^s \equiv 1 \pmod{p}$ do potęgi $(q-1)/s$, widzimy, że $2^{q-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Tak samo, cyklicznie, $2^{r-1} \equiv 1 \pmod{q}$, $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{r}$, czyli mamy to, o co chodzi (a nawet więcej: okazuje się, że każda z liczb $2^{p-1} - 1$, $2^{q-1} - 1$, $2^{r-1} - 1$ dzieli się przez iloczyn pqr).

Pozostaje wskazać liczbę pierwszą s o podanej na wstępie własności. Przeglądając tablicę liczb Mersenne'a znajdujemy w niej liczbę złożoną $2^{29} - 1$, z rozkładem na czynniki pierwsze $233 \cdot 1103 \cdot 2089$. Zatem liczby $p = 233$, $q = 1103$, $r = 2089$ tworzą jedną z trójek, jakich szukamy.

Rozwiązanie zadania F 859. Niech x oznacza kierunek prostopadły do ścianki, n gęstość fotonów, a ε średnią energię fotonu. Zderzając się sprężyście ze ścianką foton o pędzie P padający pod kątem θ przekazuje jej pęd $2P\cos\theta$. W jednostce czasu Δt z każdego kierunku tworzącego kąt θ z normalną do każdego elementu ścianki o powierzchni S dolatuje więc

$$\frac{nSc\Delta t\cos\theta}{4\pi}$$

fotonów – uwzględniony został izotropowy rozkład kierunków ruchu fotonów (czynnik 4π w mianowniku). Biorąc pod uwagę, że dla fotonu $P = \varepsilon/c$, gdzie c jest prędkością światła, siła nacisku na ściankę równa jest przekazowi pędu w jednostce czasu, a ciśnienie jest stosunkiem siły nacisku do pola powierzchni, i sumując po wszystkich kątach padania, otrzymujemy:

$$p = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\, \sin\theta \cdot nc\cos\theta \cdot 2\frac{\varepsilon}{c}\cos\theta = \frac{1}{3}n\varepsilon.$$

Ostatecznie $p = \dfrac{1}{3}\dfrac{E}{V}$.

Wynik ten możemy uzyskać bez całkowania: w sześciennym naczyniu dla ustalonej ściany średnio 1/6 fotonów porusza się w jej kierunku, przekazując jej przy zderzeniu pęd $2E/c$.

Rozwiązanie zadania F 860. Energia fotonu o pędzie P wynosi cP. W związku z tym pochłanianie przez Ziemię promieniowania słonecznego związane jest z pochłanianiem strumienia pędu równego q/c. Związane z pochłanianiem pędu promieniowania siła F odpychająca od Słońca Ziemię o promieniu R wynosi więc $F = \pi R^2 q/c \approx 5{,}8 \cdot 10^8$ N. Siła F_G przyciągania Ziemi i Słońca wynosi:

$$F_G = \frac{GM_\mathrm{S}M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{ZS}^2},$$

gdzie M_S oznacza masę Słońca, a M_Z masę Ziemi. Przyspieszenie Ziemi w ruchu dookoła Słońca wynosi $4\pi R_\mathrm{ZS}/T^2$, a masę Ziemi możemy zastąpić wyrażeniem $\mathrm{g}R^2/\mathrm{G}$. Po podstawieniu tych wielkości otrzymujemy, że stosunek siły z jaką promieniowanie Słońca odpycha Ziemię do siły przyciągania Ziemia-Słońce wynosi:

$$\frac{F}{F_G} = \frac{\mathrm{G}T^2 q}{4\pi R_\mathrm{ZS}\mathrm{g}c} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-14}.$$