Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2014

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
669 ($WT = 1{,}38$) i 670 ($WT = 2{,}44$)
z numeru 11/2013

Jędrzej Garnek	Poznań	40,03
Andrzej Idzik	Bolesławiec	39,87
Marek Spychała	Warszawa	39,37
Janusz Olszewski	Warszawa	38,48
Wojciech Maciak	Warszawa	38,32
Paweł Duch	Bielawa	36,83
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	32,75
Tomasz Wietecha	Tarnów	32,72

Zadania z matematyki nr 683, 684

Redaguje Marcin E. KUCZMA

683. Dane są dwa przystające okręgi, przecinające się w punktach A i B. Punkt X leży na jednym z tych okręgów, punkt Y na drugim, przy czym prosta XY nie przechodzi ani przez A, ani przez B, ani przez środek odcinka AB. Punkt Z jest wierzchołkiem równoległoboku $XBYZ$. Dowieść, że okręgi opisane na trójkątach AXZ, AYZ są przystające do dwóch danych okręgów.

684. Wykazać, że dla żadnej pary różnych liczb pierwszych p, q układ równań
$$a^2 + b^2 = p, \qquad x^2 + y^2 = q, \qquad (a - x)^2 + (b - y)^2 = |p - q|$$
nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych a, b, x, y.

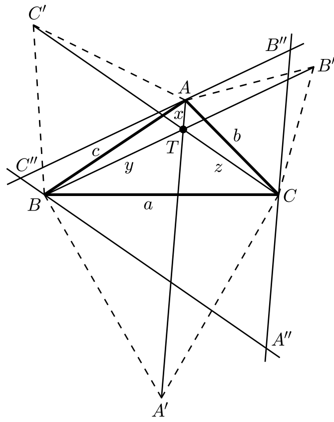
Zadanie 684 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2014

Przypominamy treść zadań:

675. Alfabet liczy 24 litery; dwie z nich to alfa oraz omega. Spośród wszystkich słów (ciągów liter) długości n wybieramy losowo jedno. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną n, dla której bardziej prawdopodobne jest wylosowanie słowa, w którym litery alfa i omega co najmniej raz sąsiadują, niż słowa bez tej własności.

676. W trójkącie o bokach długości a, b, c, o wszystkich kątach wewnętrznych mniejszych od 120°, znajduje się punkt, którego suma odległości od wierzchołków jest minimalna i wynosi d. Dowieść, że zachodzi równość $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = 3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)$.



675. Niech p_n będzie prawdopodobieństwem wylosowania słowa *dobrego*, tj. takiego, w którym dwie wyróżnione litery nie sąsiadują, zaś $q_n = 1 - p_n$ prawdopodobieństwem wylosowania słowa *złego*. Zapiszmy te wartości jako sumy $p_n = p'_n + p''_n$, $q_n = q'_n + q''_n$, gdzie pojedynczy prim odpowiada sytuacjom, gdy ostatnia litera słowa jest niewyróżniona, a podwójny prim – sytuacjom, gdy ostatnia litera jest wyróżniona. Mamy zależności rekurencyjne
$$p'_n = p_{n-1} \cdot \tfrac{22}{24}, \qquad q'_n = q_{n-1} \cdot \tfrac{22}{24},$$
$$p''_n = p'_{n-1} \cdot \tfrac{2}{24} + p''_{n-1} \cdot \tfrac{1}{24}, \qquad q''_n = q_{n-1} \cdot \tfrac{2}{24} + p''_{n-1} \cdot \tfrac{1}{24};$$
wyjaśnienie ostatniej z nich: złe n-słowo, zakończone jedną z wyróżnionych liter, można uzyskać z dowolnego złego $(n-1)$-słowa (dopisując na końcu jedną z tych dwóch liter), bądź z dobrego $(n-1)$-słowa, zakończonego wyróżnioną literą (dopisując drugą wyróżnioną literę); uzasadnienie pozostałych zależności jest podobne. Odejmując dwie ostatnie równości otrzymujemy
$$\begin{aligned} p''_n - q''_n &= \tfrac{1}{12}(p'_{n-1} - q_{n-1}) = \tfrac{1}{12}\Big(p_{n-2} \cdot \tfrac{22}{24} - (1 - p_{n-1})\Big) \\ &= \tfrac{1}{12}p_{n-1} + \tfrac{11}{144}p_{n-2} - \tfrac{1}{12}. \end{aligned}$$
Jednocześnie ta sama różnica daje się zapisać jako
$$\begin{aligned} p''_n - q''_n &= (p_n - p'_n) - (q_n - q'_n) \\ &= (p_n - q_n) - \Big(p_{n-1} \cdot \tfrac{22}{24} - q_{n-1} \cdot \tfrac{22}{24}\Big) \\ &= (2p_n - 1) - \tfrac{11}{12}(2p_{n-1} - 1). \end{aligned}$$
Przyrównanie prawych stron uzyskanych równości daje jednorodną rekurencję liniową drugiego rzędu
$$p_n = \frac{23}{24}\,p_{n-1} + \frac{11}{288}\,p_{n-2}.$$
Wraz z wartościami początkowymi $p_0 = p_1 = 1$ wyznacza ona cały ciąg (p_n). Numerycznie można się przekonać, że $p_{207} > 0{,}5014$, $p_{208} < 0{,}4999$, a zatem liczba, o którą pyta zadanie, wynosi 208.

Oczywiście można też uzyskać zwykłą metodą rozwiązanie tej ostatniej rekurencji w postaci
$$p_n = A\alpha^n + B\beta^n; \qquad \alpha = \frac{23 + \delta}{48}, \qquad \beta = \frac{23 - \delta}{48},$$
$$A = \frac{1}{2} + \frac{25}{2\delta}, \qquad B = \frac{1}{2} - \frac{25}{2\delta} \qquad (\delta = \sqrt{617}\,)$$
i zauważyć, że $p_n > A\alpha^n$ dla n nieparzystych, $p_n < A\alpha^n$ dla n parzystych. Wystarczy więc sprawdzić, że $A\alpha^{207} > 0{,}5 > A\alpha^{208}$, czyli że liczba $(\ln 2A)/(-\ln\alpha)$ leży pomiędzy 207 i 208. Tak w istocie jest; jej przybliżona wartość wynosi 207,89.

676. Wzór dany do udowodnienia przedziwnie przypomina wzór z zadania 658 (nr 3/2013) – to nie przypadek. Tam była mowa o czworościanie; ale w omówieniu rocznym (nr 2/2014) był dyskutowany przypadek dowolnego wymiaru: jeśli w przestrzeni $\mathbb{R}^{n-1}$ umieścimy sympleks foremny o krawędzi k, to dla dowolnego punktu tej przestrzeni, leżącego w odległościach $d_1, \ldots, d_n$ od jego wierzchołków, zachodzi równość
$$\Big(k^2 + d_1^2 + \ldots + d_n^2\Big)^2 = n\Big(k^4 + d_1^4 + \ldots + d_n^4\Big).$$
Tu zastosujemy skromniutki jego wariant: $n = 3$.

Niech ABC będzie trójkątem rozważanym obecnie, o bokach a, b, c. Punkt, o którym mowa, to *punkt Toricellego* (lub *punkt Fermata*) T; założenie o kątach $< 120^\circ$ gwarantuje, że T leży wewnątrz trójkąta, na przecięciu odcinków AA', BB', CC' – gdzie litery z primami oznaczają wierzchołki trójkątów równobocznych BCA', CAB', ABC', zbudowanych na zewnątrz trójkąta ABC – to własność dobrze znana (wyprowadzenie i komentarze można znaleźć w wielu miejscach; choćby `http://pl.wikipedia.org/wiki/Punkt_Fermata`).

Przez punkty C, A, B prowadzimy proste równoległe odpowiednio do AA', BB', CC'; przecinając się, tworzą one trójkąt równoboczny $A''B''C''$ (oznaczenia jak na rysunku). W trapezach równoramiennych (o kątach 60°, 120°) $CTBA''$, $ATCB''$, $BTAC''$ zachodzą równości
$$|A''T| = |BC| = a, \qquad |B''T| = |CA| = b, \qquad |C''T| = |AB| = c.$$
Z rysunku widać ponadto, że trójkąt $A''B''C''$ ma bok długości $|TA| + |TB| + |TC|$, czyli d.

Wzór przytoczony na wstępie stosujemy (w wersji $n = 3$) do trójkąta $A''B''C''$ oraz punktu T, leżącego w odległościach $d_1 = a$, $d_2 = b$, $d_3 = c$ od A'', B'', C''; teraz $k = d$, i mamy tezę zadania.

Takie rozwiązanie jest zgodne z intencją pana Tomasza Ordowskiego (który zaproponował oba te zadania, 658 i 676). Możliwe jest też rozwiązanie znacznie bardziej bezpośrednie (choć i bardziej rachunkowe). Odcinki TA, TB, TC tworzą kąty po 120°. Oznaczając ich długości przez x, y, z, mamy $a^2 = y^2 + z^2 + yz$ (i podobnie b^2, c^2). Podstawiając te wyrażenia do wzoru z tezy zadania dostajemy po obu stronach wielomiany symetryczne zmiennych x, y, z, dające się wyrazić przez podstawowe formy symetryczne $d = x + y + z$, $e = yz + zx + xy$, $f = xyz$ (to kilka linijek prostych przekształceń). Zarówno po lewej, jak i po prawej stronie, wyrazy zawierające f ulegają redukcji; i jedna, i druga strona sprowadza się do wyrażenia $(3d^2 - 3e)^2$.