Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2014

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
667 ($WT = 2{,}35$) i 668 ($WT = 1{,}60$)
z numeru 10/2013

Rami Marcin Ayoush	Szelków	45,50
Adam Dzedzej	Gdańsk	44,28
Marcin Małogrosz	Warszawa	44,25
Janusz Fiett	Warszawa	44,02
Jędrzej Garnek	Poznań	40,03
Marek Spychała	Warszawa	39,37
Andrzej Idzik	Bolesławiec	38,63
Wojciech Maciak	Warszawa	38,32

Pan Adam Dzedzej kończy swoją drugą rundę „44". Panowie Rami Ayoush, Marcin Małogrosz, Janusz Fiett to nowe twarze – witamy w Klubie 44. Dawno nie mieliśmy tak gromadnego jednoczesnego przekroczenia magicznej bariery!

Zadania z matematyki nr 681, 682

681. Mamy dwa stosy bierek. Dwaj gracze wykonują ruchy na przemian. W jednym ruchu wolno: usunąć jedną bierkę (z dowolnie wybranego stosu); usunąć po jednej bierce z obu stosów; przełożyć jedną bierkę z jednego (dowolnego) stosu na drugi. Gra kończy się, gdy wszystkie bierki znikną. Wygrywa gracz, który zdjął ostatnią bierkę. W zależności od liczności stosów w stanie początkowym, ustalić, czy i który z graczy (rozpoczynający czy jego przeciwnik) ma strategię wygrywającą.

682. Liczby dodatnie $x_1, \ldots, x_n$ spełniają warunek
$$\frac{1}{1+x_1} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} = 1.$$
Udowodnić, że
$$\frac{\sqrt{x_1} + \ldots + \sqrt{x_n}}{n-1} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{x_n}}.$$
Zadanie 682 zaproponował pan Paweł Najman z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2014

Przypominamy treść zadań:

673. Czy istnieją cztery kolejne liczby całkowite dodatnie, których iloczyn, powiększony o 2^{10}, jest kwadratem liczby całkowitej? Podać wszystkie rozwiązania (jeśli istnieją).

674. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które spełniają układ równań funkcyjnych
$$f(x+1) = f(x) + 1, \quad f(x^2) = f(x)^2 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

673. Szukamy rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych x, y równania
$$x(x+1)(x+2)(x+3) = y^2 - 1024.$$
Przepisujemy lewą stronę jako $z^2 - 1$, gdzie $z = x^2 + 3x + 1$ (skoro $x \geqslant 1$, to $z \geqslant 5$) i rozwiązujemy równanie
$$y^2 - z^2 = 1023 = 3 \cdot 11 \cdot 31.$$
Jego lewa strona to iloczyn $(y+z)(y-z)$, w którym pierwszy czynnik jest dodatni, więc drugi też. Musi to być iloczyn jednej z czterech postaci: $1023 \cdot 1$, $341 \cdot 3$, $93 \cdot 11$, $33 \cdot 31$; dają one odpowiednio wartości $z = 511, 169, 41, 1$. Jedynie $z = 41$ jest wartością trójmianu $x^2 + 3x + 1$ dla naturalnego x, mianowicie $x = 5$. Otrzymujemy jedyne rozwiązanie zadania: $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 + 2^{10} = 52^2$.

674. Niech f będzie funkcją, spełniającą podane równania. Wykażemy, że jest to funkcja nieparzysta. Z drugiego równania widać, że $f(-x)^2 = f(x)^2$. Tak więc $f(-x) = \pm f(x)$. Przypuśćmy, że dla pewnej liczby x_0 zachodzi równość $f(-x_0) = f(x_0) =: y_0$. Wystarczy pokazać, że $y_0 = 0$. Otóż
$$y_0 + 1 = f(-x_0) + 1 = f(1 - x_0) = \pm f(x_0 - 1) = \pm(y_0 - 1)$$
(ostatnia równość wynika ze spostrzeżenia, że $f(x-1) = f(x) - 1$ dla wszystkich x). Stąd $|y_0 + 1| = |y_0 - 1|$, co jest prawdą jedynie dla $y_0 = 0$. Zatem f jest funkcją nieparzystą.

Dla $x \geqslant 0$ mamy $f(x) = f(\sqrt{x})^2 \geqslant 0$. Wobec nieparzystości, $f(x) \leqslant 0$ dla $x \leqslant 0$. Dla $x \leqslant 1$ dostajemy oszacowanie $f(x) = f(x-1) + 1 \leqslant 1$. To znaczy, że funkcja f odwzorowuje przedział $\langle 0; 1\rangle$ w siebie. Z równania $f(x+1) = f(x) + 1$ wynika teraz, że funkcja f odwzorowuje każdy przedział postaci $\langle k; k+1\rangle$ w siebie ($k \in \mathbb{Z}$). Zachodzi więc nierówność
$$|f(x) - x| \leqslant 1 \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$
Weźmy dowolną liczbę $u > 1$ i oznaczmy $f(u) = v$. Z równania $f(x^2) = f(x)^2$ dostajemy $f(u^{2^n}) = v^{2^n}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Stąd $|v^{2^n} - u^{2^n}| \leqslant 1$, czyli
$$\left|\left(\frac{v}{u}\right)^{2^n} - 1\right| \leqslant \left(\frac{1}{u}\right)^{2^n},$$
co w granicy (przy $n \to \infty$) daje równość $v = u$. Wykazaliśmy w ten sposób, że $f(x) = x$ dla $x > 1$.

Dzięki równości $f(x-1) = f(x) - 1$ wnosimy stąd, że
$$f(x) = x \qquad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}.$$
Funkcja identycznościowa spełnia oba równania układu i jest jego jedynym rozwiązaniem.