Zadania z matematyki nr 679, 680

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2014

679. Na okręgu wybrano skończoną liczbę punktów i niektóre z nich oznaczono kolorem białym, a pozostałe czerwonym tak, że punktów białych jest przeszło dwukrotnie więcej niż czerwonych. Dowieść, że istnieje taki punkt biały, że każdy łuk okręgu, mający koniec w tym punkcie, zawiera więcej punktów białych niż czerwonych.

680. Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta ABC przecinają okrąg na nim opisany odpowiednio w punktach D, E, F. Odcinki prostych DE i DF, wyznaczone przez punkty przecięcia tych prostych z bokami trójkąta, mają środki w punktach M i N. Odcinki AD i EF przecinają się w punkcie P. Wykazać, że środek okręgu, przechodzącego przez punkty D, M, N, leży na okręgu, przechodzącym przez punkty P, M, N.

Zadanie 680 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 665 ($WT = 1{,}32$) i 666 ($WT = 1{,}86$) z numeru 9/2013

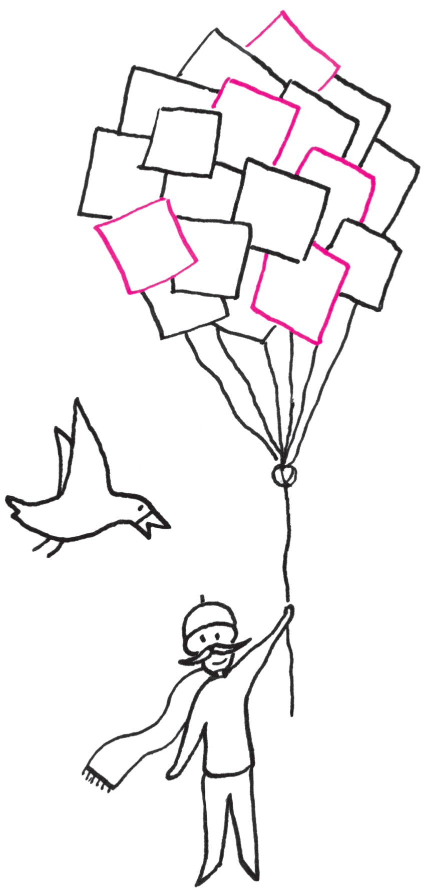
Rami Marcin Ayoush	Szelków	41,55
Marcin Małogrosz	Warszawa	40,53
Adam Dzedzej	Gdańsk	40,33
Janusz Fiett	Warszawa	40,07
Marek Spychała	Warszawa	39,37
Andrzej Idzik	Bolesławiec	38,63
Wojciech Maciak	Warszawa	36,72
Jędrzej Garnek	Poznań	36,08

Rozwiązania zadań z numeru 12/2013

Przypominamy treść zadań:

671. Płaszczyznę podzielono prostymi poziomymi i pionowymi na kwadraty jednostkowe i niektóre z tych kwadratów (skończenie wiele) zaczerniono. Każdy czarny kwadrat ma wspólne boki z dokładnie dwoma innymi czarnymi kwadratami. Ile może być czarnych kwadratów? Podać wszystkie możliwe wartości ich liczby.

672. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele par liczb wymiernych dodatnich u, v, dla których liczba $u + \frac{1}{u} + v + \frac{1}{v}$ jest całkowita.



671. Potraktujmy zaczernione kwadraty jako wierzchołki skończonego grafu; para wierzchołków jest połączona krawędzią grafu, gdy odpowiadające im kwadraty sąsiadują (mają wspólny bok). Zgodnie z treścią zadania, z każdego wierzchołka wychodzą dokładnie dwie krawędzie. Graf rozpada się zatem na rozłączne cykle – to znany fakt (i łatwy do wykazania: z dowolnego wierzchołka rozpoczynamy wędrówkę po krawędziach grafu, nie powtarzając żadnej krawędzi; musimy wrócić do punktu wyjścia; odrzucamy powstały cykl i powtarzamy postępowanie, do wyczerpania wszystkich krawędzi).

Każdy cykl ma długość parzystą. Aby to zobaczyć, wystarczy sobie wyobrazić, że (niezależnie od zaczernień rozważanych w zadaniu) cała płaszczyzna jest „w tle" pomalowana dwoma odcieniami, jak szachownica, a sąsiadujące kwadraty mają różne odcienie; zamknięcie cyklu wymaga parzystej liczby kroków.

Tak więc liczba czarnych kwadratów jest parzysta. Jasne, że nie może ona być równa 2 i że może być równa 4. Czy może być równa 6? Musiałby to być pojedynczy cykl; znalazłby się w nim czarny kwadrat narożny K, sąsiadujący np. od wschodu i od północy z dwoma czarnymi kwadratami, K' i K''. Kwadrat L, różny od K i sąsiadujący z K', K'', nie może być zaczerniony (zamknąłby on cykl długości 4). Każda droga, łącząca K' z K'' i omijająca kwadraty K, L, wymaga zaczernienia więcej niż 3 kwadratów. Nie jest więc możliwe, by liczba czarnych kwadratów wyniosła 6.

Może to być wszelako każda większa liczba parzysta $2k$ ($k \geqslant 4$). Wystarczy wziąć prostokąt o wymiarach $(k-1) \times 3$ i zaczernić wszystkie jego pola brzegowe. Jest ich dokładnie $2k$ i tworzą cykl o wymaganej własności.

Dostajemy odpowiedź: liczba czarnych kwadratów może być dowolną dodatnią liczbą parzystą z wyjątkiem 2 oraz 6.

672. Nieskończony ciąg takich par (u_n, v_n) możemy uzyskać na przykład biorąc ciąg Fibonacciego ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$) i określając

$$u_n = \frac{F_{2n+1}}{F_{2n-1}}, \qquad v_n = F_{2n+1}F_{2n-1} = F_{2n}^2 + 1.$$

Dla każdego $n \geqslant 1$ mamy wówczas

$$u_n + \frac{1}{u_n} = \frac{F_{2n+1}^2 + F_{2n-1}^2}{F_{2n+1}F_{2n-1}} = \frac{(F_{2n+1} - F_{2n-1})^2}{F_{2n+1}F_{2n-1}} + 2 = \frac{F_{2n}^2}{v_n} + 2 = \frac{v_n - 1}{v_n} + 2 = 3 - \frac{1}{v_n},$$

a zatem suma

$$u_n + \frac{1}{u_n} + v_n + \frac{1}{v_n} = 3 + v_n$$

jest liczbą całkowitą.

Czołówka ligi zadaniowej**Klub 44F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 562 ($WT = 1{,}30$), 563 ($WT = 3{,}40$), 564 ($WT = 1{,}56$) i 65 ($WT = 2{,}07$) z numerów 9/2013 i 10/2013

Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	45,12l
Krzysztof Magiera	Łosiów	42,60l
Michał Koźlik	Gliwice	40,78l
Jacek Konieczny	Poznań	25,55l
Ryszard Woźniak	Kraków	22,11
Tomasz Wietecha	Tarnów	22,37

Liczbę 44 punktów po raz trzeci przekroczył pan Andrzej Nowogrodzki. Gratulujemy! W podsumowaniu ligi zamieszczonym w numerze 2/014 złośliwy chochlik usunął nazwisko pana Ryszarda Woźniaka. Bardzo przepraszamy!