Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2014

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 663 ($WT = 1{,}92$) i 664 ($WT = 1{,}53$) z numeru 6/2013

Rami Marcin Ayoush	Szelków	41,55
Marek Spychała	Warszawa	39,37
Janusz Fiett	Warszawa	38,75
Andrzej Idzik	Bolesławiec	37,70
Marcin Małogrosz	Warszawa	37,48
Wojciech Maciak	Warszawa	36,72

Zadania z matematyki nr 673, 674

Redaguje Marcin E. KUCZMA

673. Czy istnieją cztery kolejne liczby całkowite dodatnie, których iloczyn, powiększony o 2^{10}, jest kwadratem liczby całkowitej? Podać wszystkie rozwiązania (jeśli istnieją).

674. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które spełniają układ równań funkcyjnych

$$f(x+1) = f(x) + 1, \quad f(x^2) = f(x)^2 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

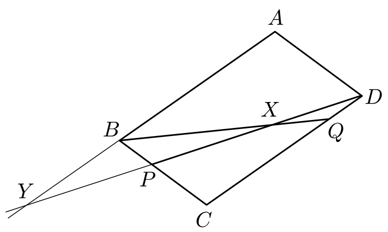
Zadanie 674 zaproponował pan Paweł Najman z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2013

Przypominamy treść zadań:

665. Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach BC i DC, odcinki BP i DQ mają jednakową długość. Dowieść, że odcinki BQ i DP przecinają się w punkcie, leżącym na dwusiecznej kąta BAD.

666. Niech W będzie wielomianem stopnia $k \geqslant 2$, o współczynnikach całkowitych nieujemnych. Zakładamy, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ wartość $W(n)$ jest k-tą potęgą liczby całkowitej nieujemnej. Udowodnić, że W ma postać $W(x) = (ax+b)^k$, gdzie $a \geqslant 1$, $b \geqslant 0$ są liczbami całkowitymi.



665. Niech X będzie punktem przecięcia odcinków BQ i DP. Przedłużamy odcinek DP do przecięcia z prostą AB w punkcie Y. Z równoległości $DC \| AB$ oraz $AD \| BC$ wynikają proporcje

$$\frac{|XY|}{|XD|} = \frac{|BY|}{|QD|} \quad \text{oraz} \quad \frac{|AY|}{|AD|} = \frac{|BY|}{|BP|}.$$

Prawe strony tych równości mają jednakową wartość, bo $|BP| = |QD|$. Zatem i lewe strony mają jednakową wartość; a to znaczy, że w trójkącie DAY odcinek AX jest dwusieczną kąta przy wierzchołku A (czy go nazwiemy BAD, czy DAY, to wszystko jedno).

666. Niech

$$W(x) = \sum_{j=0}^{k} c_j x^k; \quad c_j \in \mathbb{Z},\ c_j \geqslant 0\ (j = 0, \ldots, k);\ c_k > 0.$$

Z założenia istnieje ciąg liczb całkowitych nieujemnych (d_n) taki, że

$$W(n) = d_n^k \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ciąg $W(n)/n^k$, czyli $(d_n/n)^k$, dąży do c_k, gdy $n \to \infty$. Stąd

$$(1) \qquad \frac{d_n}{n} \to c_k^{1/k}, \quad \text{a także} \quad \frac{d_{n+1}}{n} = \frac{d_{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \to c_k^{1/k}, \quad \text{gdy} \quad n \to \infty.$$

Różnica $W(x+1) - W(x)$ jest wielomianem stopnia $k-1$, z wyrazem wiodącym $kc_k x^{k-1}$. Zatem

$$(2) \qquad \frac{W(n+1) - W(n)}{n^{k-1}} \to kc_k, \quad \text{gdy } n \to \infty.$$

Z drugiej strony,

$$(3) \qquad \frac{W(n+1) - W(n)}{n^{k-1}} = \frac{d_{n+1}^k - d_n^k}{n^{k-1}} = (d_{n+1} - d_n) \cdot A_{n,k},$$

gdzie

$$A_{n,k} = \frac{1}{n^{k-1}} \sum_{j=0}^{k-1} d_{n+1}^{k-1-j} d_n^j = \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{d_{n+1}}{n}\right)^{k-1-j} \left(\frac{d_n}{n}\right)^j.$$

Wobec związków (1), przy $n \to \infty$ mamy

$$(4) \qquad A_{n,k} \to \sum_{j=0}^{k-1} c_k^{(k-1-j)/k} c_k^{j/k} = kc_k^{1-1/k}.$$

Z zależności (3), (4), (2) wynika teraz, że przy $n \to \infty$

$$d_{n+1} - d_n = \frac{1}{A_{n,k}} \cdot \frac{W(n+1) - W(n)}{n^{k-1}} \to c_k^{1/k}.$$

Różnica $d_{n+1} - d_n$ przedstawia więc ciąg liczb całkowitych, który jest zbieżny – taki ciąg jest od pewnego miejsca stały. Oznaczając $a = c_k^{1/k}$, mamy zatem

$$d_{n+1} - d_n = a \quad \text{dla } n \geqslant n_0;$$

liczba a jest całkowita oraz dodatnia.

Dla liczb całkowitych $n \geqslant n_0$ uzyskujemy równość

$$W(n) = d_n^k = (d_{n_0} + (n - n_0)a)^k = (an+b)^k,$$

gdzie $b = d_{n_0} - n_0 a$ jest liczbą całkowitą. Wniosek: W jest wielomianem

$$W(x) = (ax+b)^k;$$

pozostaje tylko zauważyć, że $b \geqslant 0$, skoro (z założenia) współczynniki c_j wielomianu W są nieujemne, zaś $c_0 = b^k$, $c_1 = kab^{k-1}$, $a > 0$.