Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2013

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 657 ($WT = 1{,}71$) i 658 ($WT = 1{,}81$) z numeru 3/2013

Jerzy Cisło	Wrocław	44,58
Paweł Łabędzki	Kielce	43,50
Krzysztof Kamiński	Pabianice	41,63
Rami Marcin Ayoush	Szelków	41,55
Paweł Najman	Kraków	39,71
Wojciech Maciak	Warszawa	36,72
Marek Spychała	Warszawa	36,50

Znakomity uczestnik Ligi, Jerzy Cisło – już trzykrotnie Weteran – a teraz dziesiąty raz!

Zadania z matematyki nr 667, 668

Redaguje Marcin E. KUCZMA

667. Kwadratowa plansza o rozmiarach $n \times n$ ma pola pokolorowane jak szachownica; n jest ustaloną liczbą parzystą. Wykonujemy ciąg ruchów. W każdym ruchu wybieramy dowolny prostokąt, złożony z pól planszy, i zmieniamy kolory wszystkich pól w obrębie tego prostokąta (białe na czarne, czarne na białe). Wyznaczyć najmniejszą liczbę ruchów wystarczającą, by wszystkie pola planszy uzyskały jednakowy kolor.

668. Czy istnieje podzbiór właściwy zbioru liczb wymiernych dodatnich, w którym wykonalne są działania mnożenia i dzielenia, nie zawierający się w żadnym innym podzbiorze właściwym zbioru liczb wymiernych dodatnich, w którym wykonalne są powyższe działania?

Zadanie 668 zaproponował pan Michał Kremzer.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2013

Przypominamy treść zadań:

663. Czy istnieje nieskończony, ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych $k_0, k_1, k_2, \ldots$ taki, że dla każdego $i \geqslant 0$ iloczyn $k_{3i}k_{3i+1}k_{3i+2}$ jest podzielny przez każdą z liczb $k_{3i}+1$, $k_{3i+1}+1$, $k_{3i+2}+1$?

664. Dowieść, że jeśli liczba rzeczywista x spełnia równanie $x^2 - x\lfloor x\rfloor - 1 = 0$, to każda potęga liczby x o wykładniku dodatnim nieparzystym także spełnia to równanie.

663. Takie ciągi istnieją. Oto jedna z możliwych konstrukcji. Zaczynamy od liczb $k_0 = 2$, $k_1 = 5$, $k_2 = 9$. Przyjmijmy, że wyrazy $k_0, k_1, \ldots, k_{3n-1}$ są już określone i tworzą ciąg rosnący długości $3n$, spełniający wymagany warunek. Oznaczmy dla wygody: $k_{3n-1} = m$. Określamy kolejne trzy wyrazy:

$$k_{3n} = 2m, \qquad k_{3n+1} = 4m+1, \qquad k_{3n+2} = (4m-1)(2m+1).$$

Jasne, że $k_{3n-1} < k_{3n} < k_{3n+1} < k_{3n+2}$. Pozostaje sprawdzić, że iloczyn trzech wypisanych liczb, równy $2m(2m+1)(4m-1)(4m+1)$, dzieli się przez każdą z tych liczb, powiększoną o 1, czyli przez liczby $2m+1$, $4m+2$, $8m^2+2m$; a to jest oczywiste. Kontynuując, otrzymujemy nieskończony ciąg (k_i) o żądanych własnościach.

664. Skoro $x(x - \lfloor x\rfloor) = 1$, to $x > 1$. Wykażemy indukcyjnie, że dla każdej liczby nieparzystej $n \geqslant 1$ różnica $y_n = x^n - x^{-n}$ jest liczbą całkowitą.

Dzieląc wyjściowe równanie przez x, widzimy, że $y_1 = \lfloor x\rfloor$ (liczba całkowita). Zatem także liczba $y_3 = y_1^3 + 3y_1$ jest całkowita.

Ustalmy wykładnik nieparzysty $n \geqslant 3$ i załóżmy, że liczby y_{n-2} oraz y_n są całkowite. Przekształcenie

$$y_{n+2} + y_{n-2} = x^{n+2} + x^{n-2} - x^{2-n} - x^{-2-n} = (x^n - x^{-n})(x^2 + x^{-2}) = y_n(y_1^2 + 2)$$

pokazuje, że wówczas liczba y_{n+2} też jest całkowita. Przez indukcję wnosimy, że liczby $y_1, y_3, y_5, y_7, \ldots$ wszystkie są całkowite.

Ponownie ustalmy wykładnik nieparzysty n. Ze związków $x > 1$, $x^n = y_n + x^{-n}$ (y_n całkowite) wynika, że $y_n = \lfloor x^n\rfloor$. Zachodzi więc równość $x^n - \lfloor x^n\rfloor - x^{-n} = 0$. Wystarczy ją pomnożyć przez x^n, by uzyskać tezę zadania.

Rozwiązanie zadania M 1401.
Z nierówności między średnimi i oszacowania $\sin x \leqslant x$ mamy

$$1/\cos\alpha + 1/\cos\beta \geqslant$$
$$\geqslant 2\sqrt{1/(\cos\alpha\cos\beta)} \geqslant$$
$$\geqslant 2\sqrt{\sin(\alpha+\beta)/(\cos\alpha\cos\beta)} =$$
$$= 2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}.$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\cos\alpha = \cos\beta$ i $\sin(\alpha+\beta) = 1$, co jest równoważne temu, że $\alpha = \beta = \pi/4$.