Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2013

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 655 ($WT = 2{,}33$) i 656 ($WT = 1{,}39$) z numeru 2/2013

Zbigniew Skalik	Wrocław	47,37
Witold Bednarek	Łódź	44,73
Paweł Łabędzki	Kielce	42,05
Krzysztof Kamiński	Pabianice	41,63
Rami Marcin Ayoush	Szelków	41,55
Jerzy Cisło	Wrocław	41,06
Wojciech Maciak	Warszawa	36,72
Marek Spychała	Warszawa	36,50
Paweł Najman	Kraków	36,37

Pan Zbigniew Skalik zalicza już drugą rundę. Zaś najwytrwalszy uczestnik Ligi – Witold Bednarek – także drugą, ale weterańską; to znaczy, „44” po raz szósty!

Zadania z matematyki nr 665, 666

Redaguje Marcin E. KUCZMA

665. Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach BC i DC, odcinki BP i DQ mają jednakową długość. Dowieść, że odcinki BQ i DP przecinają się w punkcie, leżącym na dwusiecznej kąta BAD.

666. Niech W będzie wielomianem stopnia $k \geqslant 2$, o współczynnikach całkowitych nieujemnych. Zakładamy, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ wartość $W(n)$ jest k-tą potęgą liczby całkowitej nieujemnej. Udowodnić, że W ma postać $W(x) = (ax+b)^k$, gdzie $a \geqslant 1$, $b \geqslant 0$ są liczbami całkowitymi.

Zadanie 666 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2013

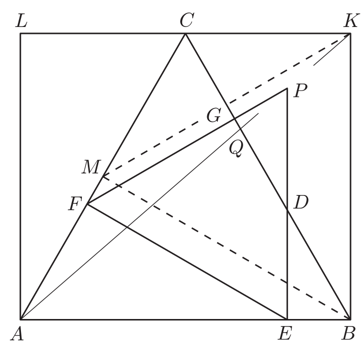
Przypominamy treść zadań:

661. Dany jest trójkąt równoboczny ABC oraz punkt D na boku BC. Punkty E, F, G, leżące odpowiednio na bokach AB, CA, BC, są wyznaczone przez warunki $DE \perp AB$, $EF \perp CA$, $FG \perp BC$. Proste DE i FG przecinają się w punkcie P. W jakim stosunku prosta AP dzieli odcinek BC?

662. Ciąg (x_n) jest określony wzorem rekurencyjnym

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{\mathrm{e}^{x_n} - 1} \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots;$$

wyraz początkowy x_0 jest dowolną liczbą dodatnią. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(2 - nx_n)}{\ln n}$.



661. Zbudujmy prostokąt $ABKL$ tak, by punkt C był środkiem odcinka KL. Niech M będzie środkiem boku CA. Każdy z trójkątów EPF, BKM ma boki prostopadłe do odpowiednich boków trójkąta ABC (rysunek); są to więc trójkąty o bokach odpowiednio równoległych – zatem jednokładne. Środkiem jednokładności jest punkt A (współliniowy z B, E oraz z M, F). Punktowi P odpowiada w tej jednokładności punkt K. To znaczy, że prosta AP przechodzi przez K (niezależnie od wyboru początkowego punktu D) i przecina odcinek BC w takim punkcie Q, że trójkąty QAB i QKC są podobne. Stąd wynik: $|BQ| : |CQ| = |AB| : |CK| = 2$.

662. Jak w rozwiązaniu zadania 654, tak i teraz użyjemy *wzoru Stolza*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

dla każdego ciągu (b_n), rosnącego do nieskończoności, i dla każdego ciągu (a_n), dla którego granica po prawej stronie istnieje.

Dany w zadaniu iloraz piszemy w postaci

$$q_n = \frac{n(2 - nx_n)}{\ln n} = nx_n \cdot \frac{2x_n^{-1} - n}{\ln n}. \tag{1}$$

Zgodnie z wynikiem zadania 654, $nx_n \to 2$; pozostaje zająć się drugim czynnikiem. We wzorze Stolza przyjmijmy $a_n = 2x_n^{-1} - n$, $b_n = \ln n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2x_n^{-1} - n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(x_{n+1}^{-1} - x_n^{-1}) - 1}{\ln(n+1) - \ln n}, \tag{2}$$

jeśli tylko ta ostatnia granica istnieje.

W rozwiązaniu zadania 654 zostało użyte przekształcenie

$$x_{n+1}^{-1} - x_n^{-1} = x_n^{-2}(\mathrm{e}^{x_n} - 1 - x_n)$$

oraz fragment rozwinięcia potęgowego

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \qquad (\text{przy } x \to 0).$$

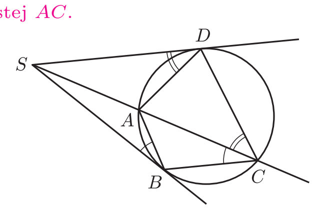
Zatem

$$\frac{2(x_{n+1}^{-1} - x_n^{-1}) - 1}{\ln(n+1) - \ln n} = \frac{2x_n^{-2}(\mathrm{e}^{x_n} - 1 - x_n) - 1}{\ln(1 + \frac{1}{n})} =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{x_n} - 1 - x_n - \frac{1}{2}x_n^2}{x_n^3} \cdot \frac{2nx_n}{n \ln(1 + \frac{1}{n})}.$$

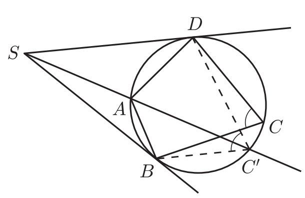
W tym ostatnim iloczynie pierwszy czynnik dąży do $1/6$ (nieco dłuższy fragment rozwinięcia $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$). Drugi czynnik: licznik dąży do 4, mianownik do 1. Cały iloczyn dąży do $2/3$. Tyle więc wynosi granica napisana po lewej stronie równości (2). Wracamy do równości (1), pamiętając, że $nx_n \to 2$, i otrzymujemy ostatecznie $\lim q_n = 4/3$.

Rozwiązanie zadania M 1396. Załóżmy najpierw, że S leży na prostej AC.



Jak wiadomo, kąt między styczną a cięciwą jest równy kątowi wpisanemu opartemu na tej cięciwie, więc $\sphericalangle SBA = \sphericalangle BCA$. Zatem trójkąty BSA i CSB są podobne, więc $AB/BC = AS/BS$. Podobnie stwierdzimy, że $AD/CD = AS/DS$, ale $BS = DS$, więc $AB/BC = AD/CD$.

Załóżmy teraz, że zachodzi $AB/BC = AD/CD$, ale S nie leży na AC (powiedzmy, że punkt A leży bliżej punktu S niż punkt C).



Niech SA przecina okrąg w punkcie C'. Z poprzedniej części zadania wiadomo, że $AB/BC' = AD/C'D$, więc $BC/CD = BC'/C'D$, co wraz z równością kątów BCD i $BC'D$ implikuje, że trójkąty BCD i $BC'D$ są podobne, a że mają wspólny bok, to są przystające. Zatem $C = C'$.