Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

`www.sem.edu.pl`

W LXIV Olimpiadzie Matematycznej wzięło udział 1464 uczniów. Do zawodów drugiego stopnia zakwalifikowano 572 osoby, a do finału zorganizowanego przez I Liceum Ogólnokształcące im. Józefa Bema w Ostrołęce, obchodzące stulecie swego istnienia, zaproszono 121 młodych ludzi. Wszystkie zadania wraz z rozwiązaniami są dostępne na stronie internetowej Olimpiady: `www.om.edu.pl`. W pierwszym stopniu najtrudniejsze było zadanie ósme, ale i tak rozwiązało je poprawnie ponad 125 osób. Nie było więc zadania bardzo trudnego, bo takie są rozwiązywane jedynie przez kilka osób w kraju.

W zawodach okręgowych najtrudniejsze było zadanie szóste:
Rozstrzygnąć, czy istnieją takie czworościany $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ o ścianach odpowiednio S_1, S_2, S_3, S_4 oraz S'_1, S'_2, S'_3, S'_4, że dla $i = 1, 2, 3, 4$ trójkąt S_i jest podobny do trójkąta S'_i, ale mimo to czworościan $\mathcal{T}$ nie jest podobny do czworościanu $\mathcal{T}'$.
Rozwiązało je poprawnie czternastu zawodników. Nie przytaczamy rozwiązania tego zadania, bo jest mu poświęcony artykuł Marcina Kuczmy na stronie 18. Warto jednak nadmienić, że wielu uczestników opisywało nieistniejące czworościany, podając np. długości ich krawędzi. Nie troszczyli się o to, by suma kątów płaskich przy jednym wierzchołku była mniejsza od $360°$ lub by suma dwóch kątów płaskich przy jednym wierzchołku była większa od trzeciego kąta płaskiego przy nim. Jest to zapewne częściowo związane z praktyczną rezygnacją z nauczania stereometrii w szkołach.

Nieco łatwiejsze było zadanie piąte, rozwiązane przez dziewiętnastu uczniów. Należało rozstrzygnąć, *czy wielomian o współczynnikach całkowitych, który jest funkcją różnowartościową na zbiorze liczb wymiernych, musi też przyjmować różne wartości dla różnych argumentów rzeczywistych.*

Wspólną cechą obu tych zadań, decydującą o ich trudności, było to, że najpierw należało sformułować tezę, a dopiero potem ją uzasadnić. Niestety, oba pojawiły się w sobotę (byłem za), czyniąc drugi dzień zawodów bardzo trudnym.

W finale pojawiły się dwa bardzo trudne zadania: trzecie (dwie szóstki i 119 zer) i szóste (dwie szóstki, cztery piątki, dwie dwójki i 113 zer). Oba wymagały właściwego pomysłu, a wiedzy tylko z gimnazjum!

Zadanie piąte: *Wykazać, że $\left(k-\frac{1}{k}\right)\left(m-\frac{1}{m}\right)\left(n-\frac{1}{n}\right) \leqslant kmn-(k+m+n)$ dla dowolnych trzech różnych liczb całkowitych $k, m, n > 0$*, sprawdzano najdłużej. W niektórych pracach pojawiły się tak długie przekształcenia, że sprawdzaliśmy je za pomocą komputera. A po „wyczyszczeniu” straciły na „powadze”, co zaraz pokażemy. Niech

$$\begin{aligned} f(k,m,n) &= 2kmn\Big(kmn-(k+m+n)-\Big(k-\frac{1}{k}\Big)\Big(m-\frac{1}{m}\Big)\Big(n-\frac{1}{n}\Big)\Big) = \\ &= 2kmn\Big(\frac{km}{n}+\frac{mn}{k}+\frac{nk}{m}-k-m-n-\frac{k}{mn}-\frac{m}{nk}-\frac{n}{km}+\frac{1}{kmn}\Big) = \\ &= 2k^2m^2+2m^2n^2+2n^2k^2-2k^2mn-2km^2n-2kmn^2-2k^2-2m^2-2n^2+2 = \\ &= (km-kn)^2+(mn-mk)^2+(nk-nm)^2-2k^2-2m^2-2n^2+2 = \\ &= k^2((m-n)^2-2)+m^2((n-k)^2-2)+n^2((k-m)^2-2)+2. \end{aligned}$$

Symetria pozwala założyć, że $k > m > n$. Jeśli $k-m \geqslant 2$ i $m-n \geqslant 2$, to

$$f(k,m,n) \geqslant k^2(2^2-2)+m^2(2^2-2)+n^2(2^2-2)+2 > 0,$$

więc nierówność zachodzi w tej sytuacji. Niech $m = n+1$. Wtedy:

$$\begin{aligned} f(k,n+1,n) &= -k^2+(n+1)^2((k-n)^2-2)+n^2((k-n-1)^2-2)+2 = \\ &= k^2(-1+(n+1)^2+n^2)-2k(n(n+1)^2+n^2(n+1))+2(n^2(n+1)^2-(n+1)^2-n^2+1) = \\ &= 2n(n+1)k^2-2n(n+1)(2n+1)k+2(n^2-1)((n+1)^2-1) = \\ &= 2n(n+1)(k^2-(2n+1)k+(n-1)(n+2)) = 2n(n+1)(k-n+1)(k-n-2). \end{aligned}$$

Ponieważ $k > m$, więc $k \geqslant m+1 = n+2$, zatem: $2n(n+1)(k-n+1)(k-n-2) \geqslant 0$. Analogicznie prawdziwy jest wzór:

$$\begin{aligned} f(m+1,m,n) &= 2m(m+1)(n-m+1)(n-m-2) = \\ &= 2m(m+1)(m-n-1)(m+2-n) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Nierówność jest prawdziwa dla każdej trójki liczb całkowitych $k > m > n$. A dla niecałkowitych liczb czasem nie jest, np. gdy $k = 1{,}2$, $m = 1{,}1$ i $n = 1$, to prawa strona jest równa $1{,}32 - 3{,}3 < 0$, a lewa — 0.

Michał KRYCH