LXV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

30 września 2013 r. – I seria,
4 listopada 2013 r. – II seria,
4 grudnia 2013 r. – III seria

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

Adresy Komitetów Okręgowych oraz bieżące informacje, a także zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`.

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria
(1 września 2013 r. – – 30 września 2013 r.)

1. Wykazać, że jeśli liczby całkowite a, b, c spełniają równanie
$$(a+3)^2+(b+4)^2-(c+5)^2=a^2+b^2-c^2,$$
to wspólna wartość obu stron jest kwadratem liczby całkowitej.

2. Dane są trzy różne liczby całkowite $a,b,c>1$ spełniające warunek $\mathrm{NWD}(a,b,c)=1$. Znaleźć wszystkie możliwe wartości liczby
$$\mathrm{NWD}(a^2b+b^2c+c^2a,\ ab^2+bc^2+ca^2,\ a+b+c).$$

3. Na tablicy napisano słowo *abdc*. W jednym ruchu możemy dopisać lub usunąć (na początku, w środku lub na końcu) palindrom parzystej długości utworzony z liter a, b, c, d. Rozstrzygnąć, czy po skończonej liczbie ruchów możemy uzyskać słowo *bacd*. (*Uwaga*: Palindromem nazywamy słowo, które czytane od lewej do prawej jest takie samo jak czytane od prawej do lewej, np. *abba*, *cc*, *daaaad*.)

4. Na bokach BC, CA, AB trójkąta ostrokątnego ABC leżą odpowiednio punkty D, E, F, przy czym $FA=FE$ oraz $FB=FD$. Udowodnić, że punkt przecięcia wysokości trójkąta ABC leży na okręgu przechodzącym przez punkty C, D, E.

II seria
(1 października 2013 r. – – 4 listopada 2013 r.)

5. Wyznaczyć wszystkie funkcje f określone na zbiorze liczb całkowitych i przyjmujące wartości całkowite, spełniające warunek
$$f(a+b)^3-f(a)^3-f(b)^3=3f(a)f(b)f(a+b)$$
dla każdej pary liczb całkowitych a, b.

6. Dowieść, że nie istnieją dodatnie liczby całkowite x, y, z, dla których
$$(3x+4y)(4x+5y)=7^z.$$

7. Dany jest okrąg o i jego cięciwa AB niebędąca średnicą. Na okręgu o wybieramy punkt P, różny od punktów A i B. Punkty Q i R leżą odpowiednio na prostych PA i PB, przy czym $QP=QB$ oraz $RP=RA$. Punkt M jest środkiem odcinka QR. Wykazać, że wszystkie uzyskane w ten sposób proste PM (odpowiadające różnym położeniom punktu P na okręgu o) mają punkt wspólny.

8. W czworościanie $ABCD$ płaszczyzna dwusieczna kąta dwuściennego o krawędzi BC przecina krawędź AD w punkcie P, zaś punkt Q jest rzutem prostokątnym punktu P na prostą BC. Udowodnić, że $\sphericalangle AQP=\sphericalangle PQD$.

III seria
(1 listopada 2013 r. – – 4 grudnia 2013 r.)

9. Udowodnić, że dla każdej trójki różnych liczb dodatnich a, b, c z odcinków o długościach
$$\sqrt[3]{(a^2-b^2)(a-b)},\quad \sqrt[3]{(b^2-c^2)(b-c)},\quad \sqrt[3]{(c^2-a^2)(c-a)}$$
można zbudować trójkąt.

10. Ciąg x_0, x_1, x_2, ... określamy wzorami: $x_0=1$, $x_1=3$ oraz
$$x_{n+2}=6x_{n+1}-x_n \quad \text{dla } n=0,1,2,\ldots.$$
Udowodnić, że dla każdego n istnieją takie liczby całkowite a, b, że
$$x_n=a^2+2b^2.$$

11. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB\neq AC$. Okrąg o wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkt M jest środkiem odcinka EF. Okrąg o średnicy MD przecina okrąg o w punktach D i P oraz przecina odcinek EF w punktach M i Q. Wykazać, że prosta PQ połowi odcinek AM.

12. W prostokącie P zaznaczono n^2 różnych punktów. Dla każdej liczby całkowitej $n\geqslant 2$ znaleźć największą możliwą liczbę prostokątów, w których każdy wierzchołek jest jednym z zaznaczonych punktów, a boki są równoległe do boków prostokąta P.