Klub 44

$$\sqrt[\otimes]{\mathfrak{f}!}=44$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 653 ($WT = 1{,}77$) i 654 ($WT = 2{,}40$) z numeru 1/2013

Wojciech Nadara	Warszawa	46,60
Zbigniew Skalik	Wrocław	43,65
Witold Bednarek	Łódź	43,34
Krzysztof Kamiński	Pabianice	40,24
Paweł Łabędzki	Kielce	39,72
Rami Marcin Ayoush	Szelków	37,83
Jerzy Cisło	Wrocław	37,34
Wojciech Maciak	Warszawa	36,72

Witamy w Klubie 44 nową postać: Wojtek Nadara.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2013

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

659. Wierzchołki n-kąta foremnego są pokolorowane dwoma kolorami. Co jednostkę czasu pokolorowanie zmienia się: każdy wierzchołek przyjmuje kolor, który bezpośrednio przed tym momentem miała większość z trójki wierzchołków: sam rozważany wierzchołek oraz dwa z nim sąsiadujące. Proces kończy się, gdy nowe pokolorowanie okaże się identyczne z poprzednim (tzn. gdy nic się już nie zmienia). Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ wyjaśnić, dla jakich początkowych konfiguracji kolorów proces będzie trwał nieskończenie.

660. Dana jest liczba naturalna $k > 1$. Znaleźć wszystkie liczby naturalne $n > 1$, spełniające nierówność $d(n^k) \leqslant k \cdot d(n)$, gdzie $d(x)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby naturalnej x.

659. Wierzchołek, sąsiadujący z dwoma wierzchołkami innego koloru niż on sam, nazwijmy *izolowanym*. Wierzchołki, które są (w danym momencie gry) izolowane, i tylko one, zmieniają kolor w najbliższym ruchu. Wierzchołki nieizolowane tworzą bloki (długości co najmniej 2); ich kolor już się nie zmienia – do końca pozostają nieizolowane.

Przypuśćmy, że w jakimś momencie są zarówno wierzchołki izolowane, jak i nieizolowane. Pewien wierzchołek izolowany musi sąsiadować z nieizolowanym. W kolejnym ruchu przejmuje kolor sąsiada i staje się nieizolowanym. Zatem w każdym ruchu liczba wierzchołków izolowanych zmniejsza się. Gdy zejdzie do zera, kolory się ustabilizują.

Proces może więc trwać nieskończenie tylko wtedy, gdy na starcie wszystkie wierzchołki są izolowane – czyli gdy są pokolorowane na przemian (co jest możliwe tylko dla n parzystych). Wówczas po pierwszym ruchu wszystkie kolory zmienią się, po drugim powróci sytuacja początkowa, i ten cykl stale będzie się powtarzał. To jest ta konfiguracja początkowa, o jaką pyta zadanie.

660. Przypuśćmy, że n ma co najmniej dwa różne dzielniki pierwsze p, q. Napiszmy $n = p^\alpha q^\beta m$, gdzie $\alpha, \beta \geqslant 1$, zaś czynnik m jest niepodzielny przez p ani q. Iloczyn $p^\alpha q^\beta$ ma $(\alpha+1)(\beta+1)$ dzielników dodatnich; iloczyn $p^{k\alpha} q^{k\beta}$ ma $(k\alpha+1)(k\beta+1)$ dzielników dodatnich. Zatem

$$d(n) = (\alpha+1)(\beta+1)d(m), \qquad d(n^k) = (k\alpha+1)(k\beta+1)d(m^k).$$

Jasne, że $d(m^k) \geqslant d(m)$. Jeśli więc zachodzi postulowana nierówność $d(n^k) \leqslant k \cdot d(n)$, to

$$(k\alpha+1)(k\beta+1) \leqslant k(\alpha+1)(\beta+1);$$

po przekształceniu: $k(k-1)\alpha\beta \leqslant k-1$; a to jest niemożliwe, skoro $k > 1$.

Pozostają do rozważenia liczby n, będące potęgami liczb pierwszych. Każda taka liczba spełnia wymagany warunek; jeśli bowiem $n = p^\alpha$, $\alpha \geqslant 1$, to

$$d(n^k) = k\alpha + 1 < k(\alpha+1) = k \cdot d(n).$$

Rozwiązanie zadania M 1394.

Z założenia $(f(x))^2 = 1$ dla każdego punktu $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{-1,1\}^n$. Z drugiej strony

$$1 = (f(x))^2 = \Big(a_0 + \sum a_i x_i + \sum b_{ij} x_i x_j\Big)^2 = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} a_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} b_{ij}^2 + w(x),$$

gdzie $w(x)$ to suma jednomianów postaci x_i i $x_i x_j$ z pewnymi współczynnikami. Kluczem do rozwiązania zadania jest wysumowanie tej równości po wszystkich 2^n punktach kostki dyskretnej. Ponieważ dla ustalonego i zachodzi

$$\sum_{x \in \{-1,1\}^n} x_i = \sum_{x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n \in \{-1,1\}} \Big(\sum_{x_i \in \{-1,1\}} x_i\Big) = 0$$

i podobnie dla ustalonych $i < j$ mamy $\sum_{x \in \{-1,1\}^n} x_i x_j = 0$, więc również

$$\sum_{x \in \{-1,1\}^n} w(x) = 0.$$

Zatem

$$2^n = \sum_{x \in \{-1,1\}^n} \Big(\sum a_i^2 + \sum b_{ij}^2\Big) = 2^n \Big(\sum a_i^2 + \sum b_{ij}^2\Big).$$