Klub 44

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 651 ($WT = 1{,}95$) i 652 ($WT = 2{,}45$) z numeru 12/2012

Wojciech Nadara	Warszawa	42,43
Zbigniew Skalik	Wrocław	41,25
Witold Bednarek	Łódź	40,94
Paweł Łabędzki	Kielce	37,95
Krzysztof Kamiński	Pabianice	37,84
Wojciech Maciak	Warszawa	36,72
Zbigniew Sewartowski	Wieliczka	35,45
Rami Marcin Ayoush	Szelków	34,72
Jerzy Cisło	Wrocław	34,66

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2013

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

657. W okienka tabeli prostokątnej, mającej m kolumn i n wierszy, wpisujemy liczby 0 lub 1 tak, by w każdym kwadracie 2×2, złożonym z czterech pól mających wspólny wierzchołek, suma czterech wpisanych liczb była nieparzysta. Dla zadanej liczby naturalnej $m \geqslant 2$ znaleźć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 2$, dla których da się w taką tabelę wpisać zera i jedynki w opisany sposób tak, by żadne dwa wiersze nie były identyczne.

658. W przestrzeni dany jest czworościan foremny o krawędzi długości a oraz dowolny punkt P. Niech d_1, d_2, d_3, d_4 będą odległościami punktu P od wierzchołków czworościanu. Wykazać, że

$$(a^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2)^2 = 4(a^4 + d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 + d_4^4).$$

657. W każdym wierszu numerujemy pola od lewej strony kolejno od 1 do m. Podany warunek (nieparzyste sumy w kwadratach 2×2) oznacza, że w dowolnych dwóch sąsiednich wierszach pola o numerach parzystych są wypełnione jednakowo, a pola o numerach nieparzystych są wypełnione różnie – lub że jest odwrotnie. Pomalujmy linię poziomą, która te wiersze rozdziela, na szaro w pierwszym przypadku, a na żółto w drugim.

Jeżeli istnieją dwie kolejne linie pomalowane tym samym kolorem, to zawarty pomiędzy nimi wiersz rozdziela dwa wiersze, które są wypełnione identycznie. Stąd wynika, że jeśli chcemy mieć n wierszy parami różnych, $n > 2$, to jednakowo pomalowane linie nie mogą sąsiadować. Linie szare i żółte występują wówczas na przemian, więc każde dwa wiersze o numerach różniących się o 2 są wypełnione dokładnie przeciwnie (w kolumnach, gdzie górny ma zera, dolny ma jedynki, i na odwrót). Wobec tego wiersze o numerach różniących się o 4 są już wypełnione identycznie.

Wniosek: niezależnie od m, maksymalna liczba parami nieidentycznych wierszy nie przekracza 4. Przy tym łatwo wskazać przykład takiej macierzy z dokładnie 4 wierszami:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots \end{array}$$

Zatem liczby n, o które pyta zadanie – to 2, 3, 4.

658. Umieszczamy czworościan w przestrzeni czterowymiarowej, tak, by jego wierzchołkami były punkty

$$A_1 = (1,0,0,0), \quad A_2 = (0,1,0,0), \quad A_3 = (0,0,1,0), \quad A_4 = (0,0,0,1).$$

Dla $i \neq j$ mamy wówczas

$$|A_iA_j|^2 = (1-0)^2 + (0-1)^2 = 2,$$

co się zgadza z treścią zadania, gdy $a = \sqrt{2}$. Nie ogranicza to ogólności rozumowania, bo równość podana do udowodnienia ma po obu stronach wyrażenia jednorodne stopnia 4.

Weźmy dowolny punkt $P = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, leżący w tej samej przestrzeni trójwymiarowej, co punkty A_i, czyli taki, że $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Przyjmijmy, że leży on w odległości r od początku układu współrzędnych: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2$. Obliczamy:

$$d_i^2 = |PA_i|^2 = (x_i - 1)^2 + \sum_{j \neq i} x_j^2 = r^2 + 1 - 2x_i,$$

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 4(r^2+1) - 2,$$

$$d_i^4 = (r^2+1)^2 - 4(r^2+1)x_i + 4x_i^2,$$

$$d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 + d_4^4 = 4(r^2+1)^2 - 4(r^2+1) + 4r^2 = 4(r^2+1)^2 - 4,$$

$$a^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 4(r^2+1),$$

$$a^4 + d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 + d_4^4 = 4(r^2+1)^2.$$

Dwie ostatnie równości dają tezę zadania.

(*Autor rozwiązania*: *Jerzy Cisło.*)