Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2013

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 649 ($WT = 1{,}03$) i 650 ($WT = 2{,}51$) z numeru 11/2012

Janusz Olszewski	Warszawa	45,43
Zbigniew Skalik	Wrocław	41,25
Wojciech Nadara	Warszawa	40,67
Paweł Łabędzki	Kielce	37,95
Wojciech Maciak	Warszawa	36,72
Witold Bednarek	Łódź	36,54
Zbigniew Sewartowski	Wieliczka	35,45
Rami Marcin Ayoush	Szelków	34,52
Krzysztof Kamiński	Pabianice	33,44

Kto ciekawy, ile to jest 14 razy 44, niech wie: 616. I do tego trzeba oczywiście doliczyć bieżącą nadwyżkę w wysokości 1,43 punktu. No, panie Januszu – tak dalej!

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z matematyki nr 663, 664

Redaguje Marcin E. KUCZMA

663. Czy istnieje nieskończony, ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych $k_0, k_1, k_2, \ldots$ taki, że dla każdego $i \geqslant 0$ iloczyn $k_{3i}k_{3i+1}k_{3i+2}$ jest podzielny przez każdą z liczb $k_{3i}+1$, $k_{3i+1}+1$, $k_{3i+2}+1$?

664. Dowieść, że jeśli liczba rzeczywista x spełnia równanie $x^2 - x\lfloor x\rfloor - 1 = 0$, to każda potęga liczby x o wykładniku dodatnim nieparzystym także spełnia to równanie.

Zadanie 664 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

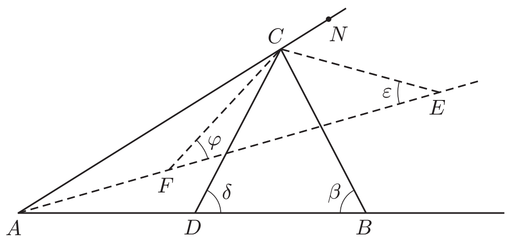
Rozwiązania zadań z numeru 2/2013

Przypominamy treść zadań:

655. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC. Punkt E jest środkiem okręgu dopisanego, stycznego do boku BC oraz przedłużeń boków AB, AC. Punkt F jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD. Dowieść, że jeżeli trójkąt CEF jest równoramienny, to także trójkąt CBD jest równoramienny.

656. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$. Niech M_n będzie liczbą naturalną, której zapis dziesiętny składa się z n dziewiątek: $M_n = 99\ldots9 = 10^n - 1$. Znaleźć najmniejszą jej wielokrotność, w której zapisie dziesiętnym cyfra 9 nie występuje.

655. Oznaczmy miary kątów trójkąta BCD przy wierzchołkach B i D przez β i δ, a miary kątów trójkąta CEF przy wierzchołkach E i F przez ε i φ.



Kąty φ i δ, jako kąty zewnętrzne trójkątów CAF i CAD, są związane zależnością

$$\varphi = |\sphericalangle FAC| + |\sphericalangle FCA| = \frac{|\sphericalangle DAC| + |\sphericalangle DCA|}{2} = \frac{\delta}{2}.$$

Niech N będzie dowolnym punktem na przedłużeniu boku AC poza wierzchołek C. Kąty ECN i BCN, jako kąty zewnętrzne trójkątów ECA i BCA, wyrażają się jako sumy: $|\sphericalangle ECN| = \varepsilon + |\sphericalangle EAC|$, $|\sphericalangle BCN| = \beta + |\sphericalangle BAC|$. Tak więc

$$\varepsilon = |\sphericalangle ECN| - |\sphericalangle EAC| = \frac{|\sphericalangle BCN| - |\sphericalangle BAC|}{2} = \frac{\beta}{2}.$$

Stąd $|\sphericalangle ECF| = 180^\circ - (\varepsilon + \varphi) = 180^\circ - (\beta+\delta)/2 > 90^\circ$. Zatem jeśli trójkąt CEF, z kątem rozwartym przy wierzchołku C, jest równoramienny, to $\varepsilon = \varphi$. Z uzyskanych wcześniej równości dostajemy wówczas $\beta = \delta$, czyli równoramienność trójkąta CBD.

656. Eksperymenty z niewielkimi wartościami n pozwalają zgadnąć, że szukaną wielokrotnością liczby M_n jest iloczyn $K_n \cdot M_n$, gdzie

$$K_n = \underbrace{11\ldots1}_{n-1}2 = \frac{10^n - 1}{9} + 1 = \frac{10^n + 8}{9}.$$

Rzeczywiście, iloczyn $K_n \cdot M_n$ nie ma dziewiątki w zapisie dziesiętnym:

$$K_n \cdot M_n = \frac{10^n + 8}{9} \cdot (10^n - 1) = \underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n}.$$

Należy teraz wykazać, że dziewiątka występuje w każdym z iloczynów $H \cdot M_n$, gdy $H = 1, 2, \ldots, K_n{-}1$.

Niech H będzie liczbą t-cyfrową: $10^{t-1} \leqslant H < 10^t$; $t \leqslant n$. Bierzemy iloczyn $H \cdot M_n$, skreślamy jego końcowe t cyfr i dostajemy liczbę

$$\left\lfloor \frac{H \cdot M_n}{10^t} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{H \cdot (10^n - 1)}{10^t} \right\rfloor = \left\lfloor H \cdot 10^{n-t} - \frac{H}{10^t} \right\rfloor = \\ = H \cdot 10^{n-t} - 1.$$

Jeżeli $t < n$, uzyskana liczba ma dziewiątkę na końcu; również wtedy, gdy $t = n$, zaś H kończy się zerem. To znaczy, że w tych przypadkach iloczyn $H \cdot M_n$ ma dziewiątkę w rzędzie 10^t.

Pamiętając, że rozważamy $H < K_n$, pozostaje rozpatrzeć sytuacje, gdy $t = n$, przy czym albo $H = K_n - 1 = 11\ldots1$ (wówczas $H \cdot M_n$ ma dziewiątkę na końcu), albo H ma w zapisie dziesiętnym co najmniej jedno zero, ale nie na pozycji końcowej. Ma więc postać $H = A0B$, gdzie zero rozdziela dwie niepuste grupy cyfr. Przyjmijmy, że B jest grupą k-cyfrową; oczywiście $k < n$. W myśl rozpatrzonego już przypadku, iloczyn $B \cdot M_n$ ma dziewiątkę w rzędzie 10^k, czyli właśnie na tej pozycji, na której H ma zero. Ta dziewiątka pozostanie obecna w iloczynie $H \cdot M_n$.

Zatem, istotnie, $K_n \cdot M_n$ jest najmniejszą wielokrotnością liczby M_n bez dziewiątki w zapisie dziesiętnym.