Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Zadania z matematyki nr 661, 662

Redaguje Marcin E. KUCZMA

661. Dany jest trójkąt równoboczny ABC oraz punkt D na boku BC. Punkty E, F, G, leżące odpowiednio na bokach AB, CA, BC, są wyznaczone przez warunki $DE \perp AB$, $EF \perp CA$, $FG \perp BC$. Proste DE i FG przecinają się w punkcie P. W jakim stosunku prosta AP dzieli odcinek BC?

662. Ciąg (x_n) jest określony wzorem rekurencyjnym

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{e^{x_n} - 1} \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots;$$

wyraz początkowy x_0 jest dowolną liczbą dodatnią. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(2 - nx_n)}{\ln n}.$$

Zadanie 662 zaproponował pan Paweł Najman z Krakowa. Jest to kontynuacja zadania 654 (którego rozwiązanie widzimy poniżej).

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2013

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 647 ($WT = 1{,}34$) i 648 ($WT = 2{,}68$) z numeru 10/2012

Janusz Olszewski	Warszawa	41,89
Wojciech Nadara	Warszawa	39,64
Paweł Łabędzki	Kielce	36,92
Witold Bednarek	Łódź	36,54
Zbigniew Sewartowski	Wieliczka	35,45
Rami Marcin Ayoush	Szelków	34,52
Krzysztof Kamiński	Pabianice	33,44

Rozwiązania zadań z numeru 1/2013

Przypominamy treść zadań:

653. W egzaminie testowym pytania są ponumerowane $1, 2, \ldots, n$. Za prawidłową odpowiedź na k-te pytanie uczestnik otrzymuje k punktów; za błędną (lub brak odpowiedzi) otrzymuje $-k$ punktów. Po zliczeniu wyników okazało się, że w każdej trójce uczestników znajdują się dwaj tacy, którzy uzyskali różne sumy punktów. Jaka jest największa liczba uczestników, dla której taka sytuacja mogła mieć miejsce?

654. Ciąg (x_n) jest określony wzorem rekurencyjnym

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{e^{x_n} - 1} \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots;$$

wyraz początkowy x_0 jest dowolną liczbą dodatnią. Obliczyć granicę $\lim_{n\to\infty} nx_n$.

653. Wynik uzyskany przez uczestnika jest liczbą postaci $\pm 1 \pm 2 \pm \ldots \pm n$ (dowolny układ znaków). Wszystkie takie liczby są jednakowej parzystości. Zatem zbiór możliwych wyników zawiera się w zbiorze

$$\{-N, -N+2, -N+4, \ \ldots, \ N-4, N-2, N\}, \qquad \text{gdzie } N = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ten ostatni zbiór liczy $N+1$ elementów. Wykażemy, że każdy element jest możliwym wynikiem.

Uczestnik z przynajmniej jedną dobrą odpowiedzią uzyskał wynik $\sum i\varepsilon_i$, gdzie $\varepsilon_i = \pm 1$ i nie wszystkie ε_i są równe -1. Zamieniamy ciąg $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ na ciąg $(\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$ określony następująco:

- gdy $\varepsilon_1 = 1$, bierzemy $\varepsilon'_1 = -1$, pozostałe $\varepsilon'_i = \varepsilon_i$;
- gdy $\varepsilon_1 = -1$, znajdujemy najmniejszy numer j, dla którego $\varepsilon_j = 1$ (więc $\varepsilon_{j-1} = -1$); przyjmujemy $\varepsilon'_{j-1} = 1$, $\varepsilon'_j = -1$, pozostałe $\varepsilon'_i = \varepsilon_i$.

Uczestnik z „wektorem odpowiedzi” $(\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$ ma wynik $\left(\sum i\varepsilon'_i\right) = \left(\sum i\varepsilon_i\right) - 2$. Startując od prymusa z wektorem $(1, \ldots, 1)$, czyli z wynikiem N, możemy w opisany sposób wygenerować kolejno wyniki $N-2$, $N-4$ itd., aż do $-N$; łącznie $N+1$ wyników.

Warunek zadania żąda, by każdy wynik pojawił się co najwyżej dwukrotnie. Gdy pojawi się dokładnie dwukrotnie, da to szukane maksimum, równe $2(N+1) = n^2 + n + 2$.

654. Wszystkie wyrazy x_n są liczbami dodatnimi. Z nierówności $e^x > 1 + x$ (dla $x > 0$) wynika, że ciąg (x_n) jest malejący – zatem zbieżny do granicy $g \geqslant 0$. Równanie $(e^{x_n} - 1)x_{n+1} = x_n^2$ daje w granicy zależność $(e^g - 1)g = g^2$, która nie zachodzi dla żadnej liczby dodatniej g (w myśl tej samej nierówności). Zatem $g = \lim x_n = 0$.

Zastosujemy *twierdzenie Stolza*. Mówi ono, że jeśli (b_n) jest ciągiem rosnącym do nieskończoności, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

dla każdego ciągu (a_n), dla którego granica po prawej stronie istnieje.

Biorąc $a_n = 1/x_n$, $b_n = n$, mamy w mianowniku wyrażenia po prawej stronie jedynkę, a w liczniku:

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n^2} - \frac{1}{x_n} = \frac{e^{x_n} - 1 - x_n}{x_n^2}.$$

Gdy $n \to \infty$ (więc $x_n \to 0$), ten iloraz dąży do $1/2$; widać to na przykład z początkowego fragmentu rozwinięcia potęgowego $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ (przy $x \to 0$). Tak więc $\lim 1/(x_n \cdot n) = \lim(a_n/b_n) = 1/2$, czyli $\lim nx_n = 2$.