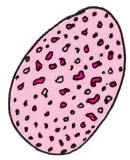
Klub 44

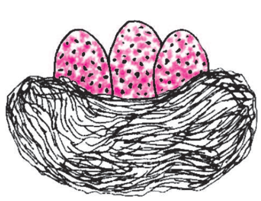


Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2013

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 645 ($WT = 1{,}15$) i 646 ($WT = 2{,}67$) z numeru 9/2012

Jędrzej Garnek	Poznań	47,73
Roksana Słowik	Knurów	47,20
Wojciech Nadara	Warszawa	39,64
Janusz Olszewski	Warszawa	37,87
Paweł Łabędzki	Kielce	36,92
Zbigniew Sewartowski	Wieliczka	35,45
Rami Marcin Ayoush	Szelków	34,52

Krzepiące (ostatnio jakoś rzadkie) zjawisko – jednocześnie dwie nowe postacie w Klubie 44 M: pan Jędrzej Garnek oraz pani Roksana Słowik. Panie stanowią (niestety) wyraźną mniejszość wśród uczestników Ligi; tym większa radość, że oto mamy w naszym Klubie już piątą Panią!



Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Zadania z matematyki nr 659, 660

Redaguje Marcin E. KUCZMA

659. Wierzchołki n-kąta foremnego są pokolorowane dwoma kolorami. Co jednostkę czasu pokolorowanie zmienia się: każdy wierzchołek przyjmuje kolor, który bezpośrednio przed tym momentem miała większość z trójki wierzchołków: sam rozważany wierzchołek oraz dwa z nim sąsiadujące. Proces kończy się, gdy nowe pokolorowanie okaże się identyczne z poprzednim (tzn. gdy nic się już nie zmienia). Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ wyjaśnić, dla jakich początkowych konfiguracji kolorów proces będzie trwał nieskończenie.

660. Dana jest liczba naturalna $k > 1$. Znaleźć wszystkie liczby naturalne $n > 1$, spełniające nierówność $d(n^k) \leqslant k \cdot d(n)$, gdzie $d(x)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby naturalnej x.

Zadanie 660 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2012

Przypominamy treść zadań:

651. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych (m, n), dla których liczby

$$\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m} \quad \text{oraz} \quad \frac{m^2}{n} + \frac{n^2}{m}$$

są także całkowite.

652. Udowodnić nierówność

$$\frac{a^{n+1}}{a+b} + \frac{b^{n+1}}{b+c} + \frac{c^{n+1}}{c+a} \geqslant \frac{a^n + b^n + c^n}{2}$$

dla liczb rzeczywistych $a, b, c > 0$ oraz liczb całkowitych $n > 0$.

651. Sprowadzenie podanych sum ułamków do wspólnego mianownika pokazuje, że iloczyn mn powinien być dzielnikiem liczb $m^2 + m + n^2 + n$ oraz $m^3 + n^3$. Zatem n ma być dzielnikiem liczb $m^2 + m$ oraz m^3, więc także liczby $m^3 - (m^2 + m)(m - 1)$, równej m. Przez symetrię, liczba m ma być dzielnikiem liczby n. Dostajemy warunek $|m| = |n|$.

Gdy $m = -n$, podane w zadaniu sumy wynoszą -2 oraz 0 (więc są całkowite). Jeśli zaś $m = n$, wynoszą one odpowiednio $2 + \frac{2}{n}$ oraz $2n$. Są one obie całkowite wtedy i tylko wtedy, gdy $n = \pm 1$ lub $n = \pm 2$.

Otrzymujemy odpowiedź: szukane pary to wszystkie pary postaci $(-n, n)$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, a ponadto cztery pary $(-2, -2)$, $(-1, -1)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$.

652. Autor zadania, pan Witold Bednarek, przysłał je wraz z takim zmyślnym rozwiązaniem: średnia arytmetyczna układu $2n + 1$ liczb, mianowicie $(2n - 1)$-krotnie powtórzonej liczby a^{n+1} oraz liczb ab^n, b^{n+1}, jest nie mniejsza od ich średniej geometrycznej, równej $a^n b$:

$$(2n-1)a^{n+1} + (a+b)b^n \geqslant (2n+1)a^n b.$$

Do obu stron dodajemy $(2n+1)a^{n+1}$ i po prostym przekształceniu otrzymujemy

$$\frac{a^{n+1}}{a+b} \geqslant \frac{(2n+1)a^n - b^n}{4n}.$$

Wystarczy teraz napisać analogiczne nierówności dla par b, c oraz c, a, po czym dodać te trzy nierówności, by uzyskać tezę zadania.