Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2013

Zadania z matematyki nr 657, 658

Redaguje Marcin E. KUCZMA

657. W okienka tabeli prostokątnej, mającej m kolumn i n wierszy, wpisujemy liczby 0 lub 1 tak, by w każdym kwadracie 2×2, złożonym z czterech pól mających wspólny wierzchołek, suma czterech wpisanych liczb była nieparzysta. Dla zadanej liczby naturalnej $m \geqslant 2$ znaleźć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 2$, dla których da się w taką tabelę wpisać zera i jedynki w opisany sposób tak, by żadne dwa wiersze nie były identyczne.

658. W przestrzeni dany jest czworościan foremny o krawędzi długości a oraz dowolny punkt P. Niech d_1, d_2, d_3, d_4 będą odległościami punktu P od wierzchołków czworościanu. Wykazać, że

$$\left(a^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2\right)^2 = 4\left(a^4 + d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 + d_4^4\right).$$

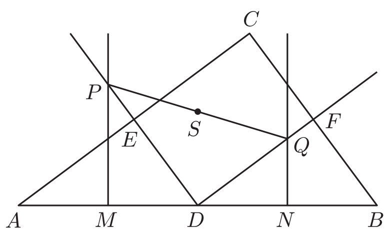
Zadanie 658 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2012

Przypominamy treść zadań:

649. W trójkącie prostokątnym ABC punkt D jest środkiem przeciwprostokątnej AB. Dowieść, że prosta AB jest styczna do okręgu, którego średnica łączy środki okręgów opisanych na trójkątach ACD i BCD.

650. Dane są liczby naturalne n oraz k $(2 \leqslant k \leqslant n)$. Wyznaczyć maksymalną liczbę wież, które można ustawić na szachownicy o rozmiarach $n \times n$ tak, by wśród dowolnie wybranych k wież były dwie, które się wzajemnie atakują (przyjmujemy, że *atakują się wzajemnie* każde dwie wieże, stojące w tym samym rzędzie poziomym lub pionowym, niezależnie od tego, czy są pomiędzy nimi jeszcze jakieś inne wieże).



649. Oznaczmy środki okręgów opisanych na trójkątach ACD i BCD odpowiednio przez P, Q. Niech E, F, M, N, S będą kolejno środkami odcinków AC, BC, AD, BD, PQ. Proste PM, QN to symetralne odcinków AD, BD; proste PE, QF to symetralne odcinków AC, BC – przecinają się prostopadle w punkcie D. Okrąg o średnicy PQ przechodzi więc przez punkt D. Ma on środek w punkcie S.

Punkt D jest środkiem odcinka MN. Zatem prosta SD jest równoległa do prostych PM i QN. Prosta AB jest do nich prostopadła. Wobec tego promień SD okręgu (PQD) jest prostopadły do AB. To znaczy, że ów okrąg jest styczny do prostej AB.

650. Bez trudu da się ustawić $n(k-1)$ wież w żądany sposób; wystarczy zapełnić nimi prostokąt $n \times (k{-}1)$. Pokażemy, że więcej się nie da.

Przyjmijmy, że na szachownicy stoi N wież. Niech m będzie największą liczbą wież, jakie można wybrać spośród nich, by żadne dwie się nie atakowały. Należy dowieść, że jeśli $N > n(k-1)$, to $m > k-1$. Wystarczy wykazać, że $N \leqslant nm$.

Ustalmy więc układ m wież, z których żadne dwie nie stoją w jednym wierszu ani jednej kolumnie. Permutując wiersze i kolumny, można przyjąć, że te wieże stoją na polach $(1,1), (2,2), \ldots, (m,m)$. Podzielmy szachownicę na cztery obszary $\left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$, gdzie A jest kwadratem $m \times m$ (na jego przekątnej stoją wybrane wieże), B i C to prostokąty $m \times (n{-}m)$ oraz $(n{-}m) \times m$, zaś D to kwadrat $(n{-}m) \times (n{-}m)$. Wobec maksymalności m, żadna wieża nie znajduje się w obrębie kwadratu D.

Weźmy teraz dowolne pole (i,j) w prostokącie B $(i \leqslant m < j)$ i symetryczne do niego pole (j,i) w prostokącie C. Gdyby na obu tych polach stały wieże, to usuwając z poprzednio ustalonego układu wieżę z pola (i,i) oraz dołączając wieże z pól (i,j), (j,i), otrzymalibyśmy układ $m+1$ wież, stojących w różnych wierszach i kolumnach – wbrew maksymalności m. Zatem co najwyżej połowa pól w sumie prostokątów B i C jest zajęta, czyli nie więcej niż $m(n-m)$ pól. Uwzględniając m^2 pól kwadratu A, uzyskujemy oczekiwane oszacowanie: $N \leqslant m^2 + m(n-m) = nm$.

Rozwiązanie zadania F 827.
Załóżmy, że na krowie zgromadzony jest ładunek Q. Wytwarza on pole elektryczne o natężeniu

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2},$$

gdzie r jest odległością od środka krowy. Gęstość energii pola elektrycznego wyraża się wzorem

$$u = \frac{1}{2\epsilon_0}E^2,$$

skąd obliczamy całkowitą energię pola, równą

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R}$$

(dla $R \to 0$ otrzymujemy znany problem nieskończonej energii ładunku punktowego). Skoro krowa jest elementarna, to z zasady ekwipartycji energii „należy się” jej $\frac{1}{2}kT$ na każdy stopień swobody. Dla ruchu dwuwymiarowego otrzymujemy więc $Q = \sqrt{8\pi\epsilon_0 kT \cdot R}$, co dla $R = 1\,\mathrm{m}$ i $T = 300\,\mathrm{K}$ daje $Q \approx 6 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{C}$, czyli kilka tysięcy ładunków elementarnych.