Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2013

Zadania z matematyki nr 655, 656

Redaguje Marcin E. KUCZMA

655. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC. Punkt E jest środkiem okręgu dopisanego, stycznego do boku BC oraz przedłużeń boków AB, AC. Punkt F jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD. Dowieść, że jeżeli trójkąt CEF jest równoramienny, to także trójkąt CBD jest równoramienny.

656. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$. Niech M_n będzie liczbą naturalną, której zapis dziesiętny składa się z n dziewiątek: $M_n = 99\ldots 9 = 10^n - 1$. Znaleźć najmniejszą jej wielokrotność, w której zapisie dziesiętnym cyfra 9 nie występuje.

Zadanie 656 zaproponował pan Piotr Zarzycki z Gdańska.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2012

Przypominamy treść zadań:

647. Dany jest przedział otwarty, którego końcami są kwadraty dwóch kolejnych liczb naturalnych, większych od 1. Dowieść, że w tym przedziale można znaleźć trzy różne liczby naturalne a, b, c takie, że $a^2 + b^2$ dzieli się przez c.

648. Niech (F_n) będzie ciągiem Fibonacciego: $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geqslant 3)$. Udowodnić, że ciąg $\left(\sqrt[n]{F_{n+2}}\right)$ jest malejący.

647. Niech liczby n^2, $(n+1)^2$ będą końcami danego przedziału. Wymagane warunki spełniają na przykład liczby $a = n^2 + 2$, $b = n^2 + n + 1$, $c = n^2 + 1$. Rzeczywiście, $a \equiv 1$, $b \equiv n \pmod{c}$, więc $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{c}$.

648. Mamy dowieść, że $F_{n+1}^{n} > F_{n+2}^{n-1}$. Dla $n = 2$ to prawda $(2^2 > 3^1)$. Dalej przyjmujemy $n \geqslant 3$. Korzystamy ze wzoru $F_n = (\varphi^n - (-\varphi)^{-n})/\sqrt{5}$, gdzie $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$. Oznaczmy:

$$E_n = \frac{\varphi^n - \varphi^{-n}}{\sqrt{5}}, \quad G_n = \frac{\varphi^n + \varphi^{-n}}{\sqrt{5}}; \quad \text{zatem} \quad E_n \leqslant F_n \leqslant G_n.$$

Wystarczy pokazać, że $E_{n+1}^{n} > G_{n+2}^{n-1}$, czyli $(E_{n+1}/G_{n+2})^n > 1/G_{n+2}$. A ponieważ $G_{n+2} > \varphi^{n+2}/\sqrt{5}$, wystarczy dowieść, że

$$\left(\frac{E_{n+1}}{G_{n+2}}\right)^n > \frac{\sqrt{5}}{\varphi^{n+2}}. \tag{1}$$

Iloraz w nawiasie szacujemy z dołu:

$$\frac{E_{n+1}}{G_{n+2}} = \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{-n-1}}{\varphi^{n+2} + \varphi^{-n-2}} = \frac{1}{\varphi}\left(1 - \frac{\varphi^{-2n-2} + \varphi^{-2n-4}}{1 + \varphi^{-2n-4}}\right) > \frac{1 - (\varphi^{-2n-2} + \varphi^{-2n-4})}{\varphi}.$$

Stąd i z nierówności Bernoulliego

$$\left(\frac{E_{n+1}}{G_{n+2}}\right)^n > \frac{1 - n(\varphi^{-2n-2} + \varphi^{-2n-4})}{\varphi^n} = \frac{\varphi^2 - n\varphi^{-2n}(1 + \varphi^{-2})}{\varphi^{n+2}}.$$

Nierówność (1) będzie udowodniona, jeśli wykażemy, że licznik tego ostatniego ilorazu przekracza $\sqrt{5}$; jest to równoważne nierówności

$$\frac{\varphi^{2n}}{n} > \frac{1 + \varphi^{-2}}{\varphi^2 - \sqrt{5}}. \tag{2}$$

Podstawiając wartość stałej φ, sprawdzamy, że nierówność (2) zachodzi dla $n = 3$. Zachodzi więc dla wszystkich $n \geqslant 3$, bo wyrażenie po lewej stronie (2) przedstawia ciąg rosnący. To kończy dowód.

* * *

Napracowałem się przy tym zadaniu jak wół; *jest obawa, że jak osioł*. Tymi słowami rozpoczynała się jedna z nadesłanych do ligi prac. Trudno o większą radość dla redaktora ligi, który takie pełne wdzięku wyznanie odczytuje jako widomy przekaz, że prowadzenie ligi ma sens; że dostarcza ona uczestnikom ciekawych wrażeń. Jest więc okazja, żeby podziękować wszystkim, którzy tymi swoimi wrażeniami dzielą się z nami w przysyłanej korespondencji.

Czasem udaje się redaktora nieźle zaskoczyć. Oto inny z uczestników napisał, że zadania są rzetelnie trudne (co prawda, to prawda – przynajmniej niektóre), ich rozwiązywanie wymaga czasu i wysiłku, więc może by się za włożony trud należała jakaś nagroda: list uznaniowy do uczelni, czy wręcz stopień naukowy.

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 643 ($WT = 1{,}80$) i 644 ($WT = 1{,}74$) z numeru 6/2012

Tomasz Wietecha	8–44,80
Jędrzej Garnek	43,91
Roksana Słowik	43,65
Zbigniew Skalik	1–41,25
Adam Dzedzej	1–40,33
Wojciech Nadara	39,64
Paweł Łabędzki	35,77
Rami Marcin Ayoush	34,52
Janusz Olszewski	13–34,05
Zbigniew Sewartowski	1–32,78
Tomasz Kochanek	32,40
Witold Bednarek	5–29,51
Andrzej Dorobisz	29,11
Marek Spychała	1–28,77
Krzysztof Kamiński	1–27,21
Andrzej Idzik	1–26,22
Jerzy Witkowski	5–24,14
Janusz Fiett	23,98
Tomasz Czajka	23,20
Michał Koźlik	22,80
Krzysztof Dorobisz	3–22,64
Grzegorz Karpowicz	1–21,28
Paweł Najman	5–20,86
Bartłomiej Dyda	5–20,18

Legenda (przykładowo): stan konta 5–29,51 oznacza, że uczestnik już pięciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (szóstej) rundzie ma 29,51 punktów.

W tej kolejce 44 punkty przekroczył, i to już po raz dziewiąty, **Tomasz Wietecha** – nie mający sobie równych w ligowym dwuboju mat-fiz.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2010, 2011 lub 2012.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, *J. Ciach* (5), M. Prauza (4), P. Kumor (11), *P. Gadziński* (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (13), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (9), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Peczarski, M. Adamaszek, P. Kubit (5), J. Cisło (9), W. Bednarek (5), D. Kurpiel, P. Najman (5), M. Kieza (4), M. Kasperski, K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz

(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, A. Czornik, A. Daniluk, Z. Galias, P. Jędrzejewicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, S. Solecki, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”: T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, A. Dzedzej, P. Figurny, M. Fiszer, Ł. Garncarek, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, A. Idzik, K. Jachacy, M. Jastrzębski, A. Jóźwik, K. Kamiński, G. Karpowicz, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, M. Łupieżowiec, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, M. Miodek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, F. S. Sikorski, Z. Skalik, A. Smolczyk, P. Sobczak, M. Spychała, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, *K. Trautman*, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Na ile to było żartem, na ile serio? Powtórzmy nasze ulubione słowo, które się w corocznych omówieniach wielokrotnie pojawiało: zabawa. Nasza liga doprawdy nie ma ambicji być niczym innym.

Biorą w tej zabawie udział głównie uczniowie i studenci; tego oczekiwaliśmy, gdy liga zaczynała żywot. Ale jest też dość liczne grono uczestników bardziej zaawansowanych wiekowo, dla których matematyka była młodzieńczą fascynacją – nierzadko wręcz kierunkiem studiów – jednak dalsza ścieżka zawodowa poprowadziła w inne rejony; zadania ligowe pozwalają przywołać wspomnienia. I to właśnie jeden z nich uroczo napisał *napracowałem się jak wół*. Serdecznie życzymy dalszej uciechy z zabawy w ligę!

A teraz zwykłe omówienie wybranych zadań.

Zadanie **626** [Ciągi (x_n), (y_n): $x_1 = a > 0$, $x_{n+1} = (x_n + x_n^{-1})/2$, $y_n = \prod_{k=1}^{n} x_k^{2^{-k}}$; $\lim y_n = \,?\,$] (współczynnik trudności $WT = 2{,}83$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 3$). **J. Garnek** i **J. Olszewski** przedstawili rozwiązania podobne do firmowego, nieco zgrabniej zapisane. Inne było rozwiązanie autora zadania (**J. Cisło**) – na tym samym pomyśle oparł swoją pracę **W. Nadara**:

Badane ciągi zależą od liczby $a > 0$; piszmy $y_n(a)$. Dla $a \geqslant 1$ mamy $1 \leqslant y_n(a) \leqslant y_{n+1}(a) \leqslant a$, więc istnieje granica $\lim y_n(a) =: g(a)$. Tak określona funkcja g spełnia w przedziale $\langle 1;\infty)$ warunki

$$(1)\qquad g(a)^2 = a \cdot g\Big(\frac{a + a^{-1}}{2}\Big), \qquad 1 \leqslant g(a) \leqslant a;$$

równanie funkcyjne wynika z definicji $y_n(a)$ przez podniesienie do kwadratu i przejście do granicy. Oznaczając $f(a) = (a + a^{-1})/2$ i przepisując równanie jako $g(a) = a^{1/2} g(f(a))^{1/2}$, można z niego indukcyjnie wyprowadzić wzór

$$(2)\qquad g(a) = \Bigg[\prod_{k=1}^{n} \big(f^{k-1}(a)\big)^{2^{-k}}\Bigg] \cdot g\big(f^n(a)\big)^{2^{-n-1}}, \qquad \text{gdzie} \quad f^m = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{m}.$$

Łatwo sprawdzić, że $f^n(a) \to 1$ przy $n \to \infty$; stąd, wobec oszacowań w (1), czynnik poza nawiasem kwadratowym w (2) także dąży do 1. Wzór (2) (w granicy) pokazuje więc, że funkcja g jest (dla $a \geqslant 1$) jednoznacznie wyznaczona przez warunki (1). Pozostaje zauważyć, że funkcja $g(a) = (a + 1)/2$ te warunki spełnia – stanowi zatem jedyne rozwiązanie. Przypadek $a \leqslant 1$ może być sprowadzony do poprzedniego przez zamianę zmiennej $x \mapsto 1/x$. Odpowiedź: $\lim y_n(a) = (a + 1)/2$.

Zadanie **627** [Tabela (n wierszy, 2 kolumny; $n > 2$), w niej losowo liczby $1, \ldots, 2n$. Zdarzenia: A – w dokładnie jednym wierszu różnica wynosi ± 1; B – w żadnym wierszu różnica nie wynosi ± 1. Które bardziej prawdopodobne?] ($WT = 2{,}50$; $LPR = 4$ (5?)). Niektórzy uczestnicy zauważyli, że to zadanie – inaczej sformułowane, ale znaczeniowo równoważne – było zadaniem konkursowym XXX Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej (1989); rozwiązania można znaleźć w wielu miejscach. Konstrukcję różnowartościowego odwzorowania $B \to A$ (podaną jako rozwiązanie firmowe) wskazali **J. Cisło**, **A. Dzedzej**, **J. Fiett**.

Dwaj ostatni uczestnicy oraz **J. Olszewski** wyprowadzili ponadto wzory rekurencyjne dla liczb rozmieszczeń typów A, B, na przykład w postaci: $a_n = 2n[(2n-1)b_{n-1} + a_{n-1}]$, $b_n = 2n[(2n-2)b_{n-1} + a_{n-1}]$; $a_1 = 2$, $b_1 = 0$; jasne, że $a_n > b_n$.

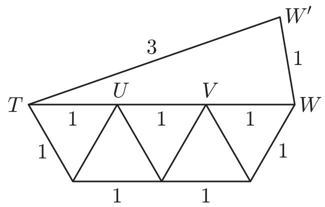
Jeszcze jedna praca zawierała konstrukcję „firmową” (lub podobną), ale z opisem niezbyt jasnym, skrótowym, z luką w uzasadnieniu.

Zadanie **631** [Czy istnieje ośmiościan opisany na kuli, której rzut na każdą ścianę jest w niej zawarty?] ($WT = 3{,}01$; $LPR = 5$). Wszystkie rozwiązania podobne do firmowego: **J. Cisło**, **J. Fiett**, **W. Nadara**, **J. Olszewski**, **T. Wietecha**.

Zadanie **633** [Płaszczyzna pokolorowana czerwono/zielono; dany $\triangle ABC \Rightarrow (\exists\, X, Y, Z$ zielone, $\triangle XYZ \equiv \triangle ABC)$ lub $(\exists\, P, Q$ czerwone, $|PQ| = 1)$] ($WT = 2{,}10$; $LPR = 5$ (6? 7?)). **J. Cisło**, **P. Łabędzki** przedstawili rozwiązania nie różniące się istotnie od firmowego; **J. Olszewski** – podobne, nieco bardziej zawiłe. **A. Dzedzej** podał dowód (nie całkiem łatwy do formalnego zapisania), wykorzystujący ciągłe deformacje pewnych szczególnych konfiguracji. Jeszcze dwie prace zawierały dowody – jedną lub drugą z tych metod – jednak, zdaniem oceniającego, z takimi lukami lub niejasnościami, że nie mogły uzyskać pełnej oceny.

Do zaprezentowania wybieramy eleganckie rozwiązanie, które znalazł **Stanisław Bednarek**. Najpierw lemat: *Przy dowolnym rozbiciu płaszczyzny na trzy zbiory, w jednym z nich są dwa punkty odległe o* 1. Podany dowód:

przypuśćmy, że tak nie jest, wtedy (rysunek) punkty U, V są w różnych zbiorach i łatwo się przekonać, że punkty T, W są w jednym zbiorze; podobnie T, W'; ale $|WW'| = 1$.



A dalej tak: załóżmy, że nie istnieje $\triangle XYZ \equiv \triangle ABC$ o wierzchołkach zielonych. Każdemu punktowi X przyporządkujmy $\triangle XYZ$ uzyskany przez przesunięcie $\triangle ABC$ o wektor $\overrightarrow{AX}$ i wybierzmy wierzchołek czerwony; w zależności od tego, czy jest to obraz translacyjny punktu A, B czy C, zaliczamy punkt X do zbioru I, II lub III. W którymś z tych zbiorów są punkty X', X'' odległe o 1 (lemat); mamy trójkąty $X'Y'Z'$, $X''Y''Z''$, i zależnie od tego, czy to zbiór I, II czy III, odcinek $X'X''$, $Y'Y''$ lub $Z'Z''$ ma oba końce czerwone.

Warto nadmienić, że „lemat" jest znanym twierdzeniem, mówiącym, że *liczba chromatyczna* płaszczyzny (czyli minimalna liczba kolorów potrzebnych do jej pomalowania tak, by każdy odcinek jednostkowy miał końce różnobarwne) przekracza 3.

Zadanie **637** [Dla jakich n zbiór $\{1, \ldots, n\}$ da się rozbić na trzy zbiory o równych sumach?] ($WT = 1{,}27$; $LPR = 16$). Łatwiutkie. Różne metody indukcyjne, pokazujące, że to się da, gdy $n \not\equiv 1 \pmod 3$ oraz $n > 3$. Na uwagę zasługuje ciekawe uogólnienie, jakie znalazł **J. Olszewski**: zbiór $\{1, \ldots, n\}$ da się rozbić na k podzbiorów o równych sumach elementów wtedy i tylko wtedy, gdy $n + 1 \geqslant 2k$ oraz $n(n+1) \equiv 0 \pmod{2k}$; dowód wykonalności przez indukcję, podobną do firmowej dla $k = 3$, ale bardziej zawiłą i wymagającą rozpatrywania licznych przypadków.

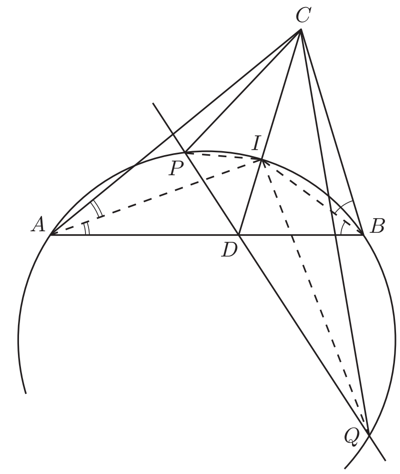
Natomiast **K. Kamiński** zauważył, że jeśli $r(n)$ oznacza liczbę rozbić zbioru $\{1, \ldots, 6n\}$ na trzy zbiory o równych sumach, to $r(n) < 3^{6n}$ (liczba wszystkich rozbić na trzy zbiory), zaś rozważając rozbicia powstałe z łączenia par o sumach $6n + 1$ można uzyskać dolne oszacowanie dla $r(n)$, również typu wykładniczego – i postawił pytanie, czy dla pewnej stałej $a > 0$ istnieje dodatnia, skończona granica $\lim a^{-n} r(n)$.

Zadanie **638** [$a, b, c > 0$, $A = \frac{1}{3a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{c}$, $B = \frac{1}{3b} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{a}$, $C = \frac{1}{3c} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{b}$, $a + b + c \geqslant abc \Rightarrow$ najwyżej jedna z liczb A, B, C jest < 1] ($WT = 2{,}38$; $LPR = 10$). Sporo dobrych prac, więc zadanie niezbyt trudne. Jednak ciekawe przez to, że właściwie wszystkie rozwiązania były różne (no, przy odpowiednim rozumieniu tego słowa…). Kilku uczestników pokazało (dość znacznie różniąc się w szczegółach), że każde dwie z liczb A, B, C dają w sumie co najmniej 2; rozwiązanie firmowe też należy do tej kategorii. Inni pokazali to samo nie dla sumy, tylko dla sumy kwadratów ($A^2 + B^2 \geqslant 2$).

Można też było wziąć iloczyn i dowodzić, że $AB \geqslant 1$; tak to zrobił **Tomasz Kochanek**, uzyskując dowód w jednej linijce:

$$AB = \frac{a+b+c}{abc} + \frac{1}{432}\left[\left(\frac{12}{a} - \frac{7}{b} + \frac{3}{c}\right)^2 + 23\left(\frac{1}{b} - \frac{3}{c}\right)^2\right] \geqslant 1.$$

Zadanie **639** [$\triangle ABC$; I – środek okręgu wpisanego; CI przecina AB w punkcie D; prosta przez punkt D przecina okrąg (IAB) w punktach $P, Q \Rightarrow CI$ – dwusieczna kąta PCQ] ($WT = 2{,}41$; $LPR = 7$). Popatrzmy, jak to zrobił **Jędrzej Garnek**:



$\frac{|CA|}{|DA|} = \frac{|CI|}{|DI|} = \frac{|CB|}{|DB|}$, więc okrąg (IAB) – to okrąg Apoloniusza dla odcinka CD i stosunku $\frac{|CI|}{|DI|}$. Punkty P, Q leżą na nim, zatem także $\frac{|CP|}{|DP|} = \frac{|CI|}{|DI|} = \frac{|CQ|}{|DQ|}$, a to znaczy, że proste PI, QI są dwusiecznymi dwóch kątów trójkąta CPQ; trzecia dwusieczna też musi przechodzić przez punkt I.

J. Olszewski, **T. Tkocz** przedstawili w zasadzie rozwiązanie firmowe. Inne rozwiązania (nie prostsze od firmowego): „erudycyjne" – **T. Kochanek** (inwersja), **W. Nadara** (biegunowa); rachunkowe – **A. Bujalski**, **T. Wietecha**.

Zadanie **642** [Gra (A, B). Stała: $n \geqslant 1$ nieparzysta. Zmienna (stan gry): $x \geqslant 0$ całkowita. Start: $x = n^n$. Legalne ruchy: $x \mapsto x - r$ $(0 < r < n)$ oraz $x \mapsto \mathrm{round}(x/n)$. Zaczyna A; kto osiągnie $x = 0$ (wygra)?] ($WT = 2{,}50$; $LPR = 7$). (Rozwiązujący wytknęli brak założenia $n > 1$). Zachowajmy terminologię z rozwiązania firmowego: liczba x jest zielona [czerwona], jeśli, startując od niej, strategię zwycięską ma gracz rozpoczynający [jego przeciwnik]. Prawie wszystkie dobre rozwiązania (**R. M. Ayoush**, **B. Dyda**, **J. Garnek**, **M. Miodek**, **J. Olszewski**, **W. Tobiś**) były oparte na tym samym pomyśle, co firmowe (autor zadania **W. Nadara**): dowód, że wśród liczb $x \geqslant n^2$ czerwone są tylko (niektóre) liczby postaci $x \equiv \lceil n/2 \rceil \pmod n$; zatem $x = n^n$ jest zielona, czyli A wygrywa.

Marek Spychała zrobił to prościej, w ogóle nie wzmiankując reszty $\lceil n/2 \rceil$, a jedynie zauważając, że liczba $x = n^2$ jest zielona oraz dowodząc, że wszystkie większe liczby, podzielne przez n, są zielone. Przypuśćmy, że tak nie jest i że $x = c$ jest najmniejszą czerwoną wielokrotnością n, większą od n^2; wtedy liczba $c - 1$ (osiągalna z c) jest zielona. Wszystkie ruchy od c powinny prowadzić do liczb zielonych, zaś pewien ruch od $c - 1$ powinien prowadzić do liczby czerwonej. Ale jedyną liczbą, osiągalną od liczby $c - 1$ a nieosiągalną od c, jest liczba $c - n$, która wszelako czerwona nie jest – patrz określenie c. Gotowe! Uzyskana informacja jest słabsza niż w pozostałych rozwiązaniach (z $\lceil n/2 \rceil$), ale do potrzebnego wyniku (n^n zielona) akurat wystarczy. Krótko, ładnie.