Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2013

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 641 ($WT = 1{,}47$) i 642 ($WT = 2{,}50$) z numeru 5/2012

Michał Miodek	Zawiercie	46,19
Roksana Słowik	Knurów	43,65
Tomasz Wietecha	Tarnów	41,44
Zbigniew Skalik	Wrocław	41,25
Jędrzej Garnek	Poznań	40,37
Adam Dzedzej	Gdańsk	40,33
Wojciech Nadara	Warszawa	39,64
Paweł Łabędzki	Kielce	35,77
Rami Marcin Ayoush	Szelków	34,52

Michał Miodek – to już numer 115 w matematycznym Klubie 44.

Zadania z matematyki nr 653, 654

Redaguje Marcin E. KUCZMA

653. W egzaminie testowym pytania są ponumerowane $1, 2, \ldots, n$. Za prawidłową odpowiedź na k-te pytanie uczestnik otrzymuje k punktów; za błędną (lub brak odpowiedzi) otrzymuje $-k$ punktów. Po zliczeniu wyników okazało się, że w każdej trójce uczestników znajdują się dwaj tacy, którzy uzyskali różne sumy punktów. Jaka jest największa liczba uczestników, dla której taka sytuacja mogła mieć miejsce?

654. Ciąg (x_n) jest określony wzorem rekurencyjnym

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{\mathrm{e}^{x_n} - 1} \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots;$$

wyraz początkowy x_0 jest dowolną liczbą dodatnią. Obliczyć granicę $\lim_{n\to\infty} nx_n$.

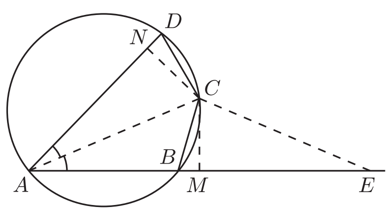
Zadanie 654 zaproponował pan Paweł Najman z Krakowa. Będzie ono miało dalszy ciąg w numerze 5/2013.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2012

Przypominamy treść zadań:

645. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Boki BC i CD mają jednakową długość. Na przedłużeniu odcinka AB odkładamy odcinek BE długości $|BE| = |AD|$. Dowieść, że $|AC| = |CE|$.

646. Niech f będzie funkcją o wartościach rzeczywistych, określoną na zbiorze liczb dodatnich, dwukrotnie różniczkowalną, spełniającą warunek $f''(x) > \dfrac{1}{1+x^2}$ dla $x > 0$. Czy taka funkcja może mieć asymptotę przy $x \to \infty$?



645. Niech punkty M i N będą rzutami prostokątnymi punktu C odpowiednio na proste AB i AD. Punkt C (środek łuku BD) leży na dwusiecznej kąta BAD. Zatem $|AM| = |AN|$, $|CM| = |CN|$, trójkąty CMB i CND są przystające, $|BM| = |DN|$. Są możliwe dwie konfiguracje: albo (jak na rysunku) punkt N leży między punktami A i D, a B między A i M – albo odwrotnie (M między A, B, zaś D między A, N).

W sytuacji, jak na rysunku, mamy równości

$$2 \cdot |AM| = |AM| + |AN| = |AB| + |BM| + |AD| - |DN| = |AB| + |AD| = |AE|,$$

więc punkt M jest środkiem odcinka AE (rozumowanie w drugim przypadku, po oczywistej zmianie w znakach, prowadzi do tej samej konkluzji). Wniosek: prosta CM jest symetralną odcinka AE i wobec tego $|AC| = |CE|$.

646. Dla $x \geqslant 1$ zachodzi nierówność

$$f''(x) > \frac{1}{1+x^2} \geqslant \frac{1}{2x^2}.$$

Weźmy pod uwagę funkcję

$$g(x) = f(x) + \frac{1}{2}\ln x.$$

Dla $x \geqslant 1$ mamy

$$g''(x) = f''(x) - \frac{1}{2x^2} > 0,$$

więc funkcja g jest ściśle wypukła w przedziale $\langle 1; \infty)$. Stąd wynika, że dla każdej liczby $x \geqslant 1$ jest spełniona nierówność $g(x) + g(3x) > 2g(2x)$. Po podstawieniu wyrażenia definiującego funkcję g i prostym przekształceniu dostajemy:

$$f(x) + f(3x) - 2f(2x) > \\ > \ln(2x) - \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\ln(3x) \qquad \text{dla } x \geqslant 1.$$

Prawa strona ma wartość stałą

$$c = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3 > 0.$$

Przypuśćmy, że prosta $y = ax + b$ jest asymptotą funkcji f przy $x \to \infty$. To znaczy, że

$$f(x) = ax + b + \varphi(x), \quad \text{gdzie} \quad \lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0.$$

Uzyskana przed chwilą zależność

$$f(x) + f(3x) - 2f(2x) > c$$

przybiera postać

$$[(ax+b) + (3ax+b) - 2(2ax+b)] + \\ + [\varphi(x) + \varphi(3x) - 2\varphi(2x)] > c \qquad \text{dla } x \geqslant 1.$$

To już jest oczekiwana sprzeczność, bo wyrażenie w pierwszym nawiasie kwadratowym ma stale wartość 0, a to w drugim dąży do 0 gdy $x \to \infty$. Wniosek: Funkcja f, spełniająca podane warunki, nie ma asymptoty przy $x \to \infty$.

Uwaga. Występująca w treści zadania funkcja $1/(1+x^2)$ złośliwie kieruje od razu myśl rozwiązującego na funkcję $\operatorname{arctg} x$ (której jest pochodną). Idąc tym tropem również można dojść do rozwiązania, jednak bardziej uciążliwego niż to, które zostało podane wyżej – i z którego widać, że istotą założenia jest oszacowanie $f''(x)$ z dołu przez funkcję $1/(2x^2)$, a nie przez $1/(1+x^2)$.