Ekstrema

Joanna JASZUŃSKA

W wielu problemach matematycznych warto rozważać elementy ekstremalne – największe, najkrótsze, najbliższe... Metoda ta bywa często przydatna w zadaniach dotyczących punktów płaszczyzny lub grafów, czyli punktów łączonych liniami.

Pojęć „najmniej", „najwięcej" itp. używamy tu „nieostro": *najmniejsza* liczba w zbiorze to taka, od której nie ma mniejszej (ale mogą być inne jej równe).

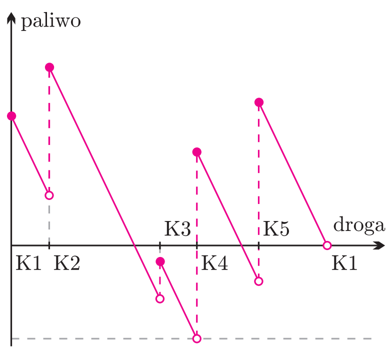
1. Koledzy Fredka mieszkają na okręgu. Fredek chce ich wszystkich odwiedzić i u każdego z nich zatankować (bak w samochodzie Fredka ma nieograniczoną pojemność). Kiedy zatankowane paliwo zużyje się całkowicie, Fredek nie będzie miał możliwości kontynuowania podróży. Wszyscy koledzy Fredka mają w sumie dokładnie tyle paliwa, ile potrzeba Fredkowi na odbycie podróży po całym okręgu. Udowodnij, że Fredek może rozpocząć podróż od takiego kolegi, że jadąc zegarowo po okręgu i tankując po drodze, odwiedzi wszystkich kolegów i wróci do punktu wyjścia.

2. W pewnym kraju jest skończona liczba miast, każde dwa z nich łączy droga jednokierunkowa. Wykaż, że istnieje miasto, z którego można dojechać do każdego z pozostałych (niekoniecznie bezpośrednio).

3. Na płaszczyźnie danych jest n punktów, przy czym odległości między nimi są różne dla różnych par punktów. Każdy punkt łączymy odcinkiem z jego najbliższym sąsiadem. Czy można otrzymać w ten sposób łamaną zamkniętą?

4. Na płaszczyźnie danych jest n punktów białych i n czarnych, żadne trzy nie są współliniowe. Wykaż, że można je tak połączyć n odcinkami, by każdy odcinek miał końce różnych kolorów i by żadne dwa odcinki nie miały punktów wspólnych.

Rozwiązania

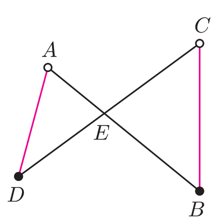


Rys. 1. Przykładowa symulacja podróży zaczynającej się i kończącej u kolegi K1, właściwą podróż należy zacząć od K4.

R1. Przeprowadźmy symulację podróży Fredka, startując od dowolnego kolegi i dopuszczając podróżowanie z ujemną ilością paliwa (rys. 1). Następnie rozważmy tego kolegę, po dotarciu do którego Fredek miał najmniej paliwa. Rozpoczynając od niego, Fredek jest w stanie odbyć całą podróż z nieujemną ilością paliwa. □

R2. Niech A będzie miastem, z którego można dojechać do największej liczby z pozostałych. Załóżmy, że istnieje miasto B, do którego nie można dotrzeć z A. Droga łącząca A i B prowadzi więc z B do A. Wtedy z miasta B można dojechać do A oraz dalej do wszystkich miast, do których można dotrzeć z A. Łącznie więc z B można dojechać do większej liczby miast niż z A, sprzecznie z wyborem A. □

R3. Przypuśćmy, że otrzymaliśmy łamaną zamkniętą $A_1A_2A_3\ldots A_k$ i że A_1A_2 jest jej najdłuższym odcinkiem. Wtedy z A_1 jest bliżej do A_k niż do A_2 oraz z A_2 jest bliżej do A_3 niż do A_1. Zatem odcinek A_1A_2 nie mógł zostać narysowany! □



Rys. 2. Zakładamy, że punkty A i C są białe, a punkty B i D – czarne.

R4. Połączmy punkty odcinkami tak, aby każdy odcinek miał końce różnych kolorów oraz by suma długości wszystkich odcinków była minimalna z możliwych. Przypuśćmy, że odcinki AB i CD mają wspólny punkt E (rys. 2). Wówczas

$$AB + CD = (AE + BE) + (EC + ED) = (AE + ED) + (BE + EC) > AD + BC$$

na mocy nierówności trójkąta. Stąd zmiana odcinków AB i CD na AD i BC zmniejszyłaby sumę długości wszystkich odcinków, sprzecznie z założeniem. □

Zadania domowe

5. Na płaszczyźnie dany jest skończony zbiór punktów, z których każde trzy są wierzchołkami trójkąta o polu mniejszym lub równym 1. Wykaż, że istnieje trójkąt o polu nie większym niż 4, zawierający wszystkie te punkty.

Wskazówka. Rozważmy trójkąt o maksymalnym polu utworzony przez dane punkty. Przez każdy z jego wierzchołków poprowadźmy prostą równoległą do przeciwległego boku. Otrzymamy trójkąt o polu nie większym niż 4...

6. W przestrzeni dany jest skończony zbiór punktów, z których każde cztery są wierzchołkami czworościanu o objętości mniejszej lub równej 1. Wykaż, że istnieje czworościan o objętości nie większej niż 27, zawierający wszystkie te punkty.

7. Na płaszczyźnie dany jest skończony zbiór punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Wykaż, że można wśród nich znaleźć trzy takie, iż poprowadzony przez nie okrąg nie zawiera we wnętrzu innych punktów tego zbioru.

Wskazówka. Rozważmy takie dwa z danych punktów, pomiędzy którymi odległość jest minimalna, oraz wszystkie przechodzące przez nie okręgi.

Zadanie 1 pochodzi z obozu naukowego Olimpiady Matematycznej w 1999 roku, a zadanie 6 – z XL OM.