Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2012

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 633 ($WT = 2{,}10$) i 634 ($WT = 1{,}33$) z numeru 1/2012

Tomasz Tkocz	Rybnik	42,75
Roksana Słowik	Knurów	40,04
Zbigniew Skalik	Wrocław	38,93
Michał Miodek	Zawiercie	37,56
Adam Dzedzej	Gdańsk	36,77
Tomasz Wietecha	Tarnów	33,02

Zadania z matematyki nr 645, 646

Redaguje Marcin E. KUCZMA

645. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Boki BC i CD mają jednakową długość. Na przedłużeniu odcinka AB odkładamy odcinek BE długości $|BE| = |AD|$. Dowieść, że $|AC| = |CE|$.

646. Niech f będzie funkcją o wartościach rzeczywistych, określoną na zbiorze liczb dodatnich, dwukrotnie różniczkowalną, spełniającą warunek $f''(x) > \dfrac{1}{1+x^2}$ dla $x > 0$. Czy taka funkcja może mieć asymptotę przy $x \to \infty$?

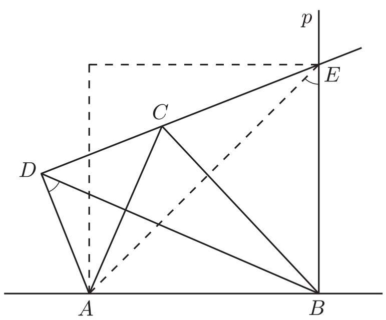
Zadanie 646 zaproponował pan Paweł Najman z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2012

Przypominamy treść zadań:

641. Na płaszczyźnie dane są punkty A, B. Rozważamy wszystkie czworokąty wypukłe $ABCD$, położone w ustalonej półpłaszczyźnie o krawędzi AB, symetryczne względem prostej BD, z kątem prostym przy wierzchołku D. Wykazać, że istnieje punkt wspólny wszystkich uzyskanych prostych CD.

642. Dana jest liczba naturalna nieparzysta n. Ala i Bartek grają w grę, wykonując ruchy na przemian. Stan gry jest liczbą całkowitą i zmienia swą wartość w trakcie gry. Gracz, do którego należy ruch, może do tej liczby zastosować jedną z dwóch operacji: odjąć od niej dowolną dodatnią liczbę całkowitą, mniejszą niż n, albo podzielić ją przez n i zaokrąglić wynik do najbliższej liczby całkowitej (wobec nieparzystości n, kierunek zaokrąglenia jest zawsze dobrze określony). Powstała nowa wartość przechodzi do dyspozycji przeciwnika. Wygrywa, kto pierwszy uzyska wartość 0. Rozpoczyna Ala, startując od liczby n^n. Kto ma strategię wygrywającą?



641. Z punktu B prowadzimy półprostą p, prostopadłą do AB, położoną w rozpatrywanej półpłaszczyźnie. Niech $ABCD$ będzie jednym z rozważanych czworokątów. Trójkąt ADC jest prostokątny, równoramienny. Stąd (i z wypukłości czworokąta $ABCD$) wynika, że punkt D leży po tej stronie p, co punkt A. Półprosta $DC^{\rightarrow}$ przecina więc p w pewnym punkcie E, tworząc czworokąt wypukły $ABED$. Ma on kąty proste przy wierzchołkach B i D; można na nim opisać okrąg. Zatem $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle ADB| = 45^\circ$ (ostatnia równość zachodzi, bo BD jest symetralną odcinka AC). Stąd wniosek, że E jest wierzchołkiem kwadratu, którego jednym bokiem jest odcinek AB. Jest to szukany punkt wspólny wszystkich możliwych prostych CD.

642. Każdy ruch zmniejsza wartość przekazywanej liczby. Gra się zatem zawsze kończy, a któryś z graczy ma strategię wygrywającą. Dodatnią liczbę całkowitą nazwijmy *zieloną*, jeśli – startując od tej liczby – gracz rozpoczynający ma strategię zwycięską; nazwijmy ją *czerwoną*, gdy strategię zwycięską ma jego przeciwnik; również liczbę 0 będziemy uważać za czerwoną. Wykażemy, że liczba n^n jest zielona; a więc (jak zwykle w tego typu zadaniach) wygrywa dziewczyna.

Rozbicie zbioru liczb całkowitych nieujemnych na liczby zielone i czerwone jest scharakteryzowane przez własności:

(1) od każdej liczby zielonej można przejść jednym ruchem do czerwonej;
(2) od każdej liczby czerwonej wszystkie ruchy prowadzą do liczb zielonych.

Wśród liczb mniejszych od n^2 liczbami czerwonymi są wielokrotności liczby n, i tylko one; sprawdzenie własności (1), (2) jest natychmiastowe. Sama liczba n^2 jest wszelako zielona (dzielenie przez n prowadzi do czerwonej liczby n). Liczby z przedziału $\left(n^2; n^2 + \frac{n}{2}\right)$ też są zielone (dzielenie z zaokrągleniem prowadzi do n). Zajmiemy się teraz liczbami większymi.

Przyjmijmy $n = 2k - 1$, czyli $k = \lceil n/2 \rceil$. Weźmy pod uwagę zbiór

$$Z = \{x \in \mathbb{N} : x > n^2 - n,\ x \not\equiv k \ (\mathrm{mod}\ n)\}.$$

Udowodnimy, że wszystkie liczby w zbiorze Z są zielone.

Przypuśćmy, że tak nie jest. Niech c będzie najmniejszą liczbą czerwoną w zbiorze Z. Wiemy już, że zielone są wszystkie liczby od $n^2 - n + 1$ do $n^2 + k - 1$; tak więc $c > n^2 + k$. Niech b będzie największą liczbą spełniającą warunki $b < c$, $b \equiv k \ (\mathrm{mod}\ n)$; zatem $b \geqslant n^2 + k$. Jest ona osiągalna z liczby c ruchem odejmowania.

Dzielenie przez n z zaokrągleniem, zastosowane do każdej z liczb b, c, daje w wyniku tę samą liczbę a; konkretnie: liczbę $a = (b + k - 1)/n$. Liczba c jest czerwona, więc w myśl własności (2) liczby b i a (osiągalne z c) są zielone. W myśl własności (1), istnieje ruch, prowadzący od liczby b do jakiejś liczby czerwonej. Nie jest to dzielenie z zaokrągleniem (które daje liczbę a); zaś odejmowanie od b liczb $1, \ldots, n-1$ nie wyprowadza ze zbioru Z (skoro $b \geqslant n^2 + k$ oraz $b \equiv k$). Którąś z tak uzyskanych różnic powinna być liczbą czerwoną – wbrew określeniu c jako najmniejszej liczby czerwonej w zbiorze Z.

Sprzeczność dowodzi, że istotnie cały zbiór Z jest zielony. Oczywiście $n^n \in Z$. Ala wygrywa.

Uwaga. Niektóre liczby zielone ($> n^2$) są także poza zbiorem Z (na przykład liczba $2n^2 - n + k$ jest zielona). Można wykazać, że oprócz liczby 0, czerwone są liczby następujących dwóch postaci, i tylko one:

$$an^{2j+1} - \frac{n^{2j} - 1}{2}, \qquad j \geqslant 0,\ 0 < a < n;$$

$$bn^{2j+1} - \frac{n^{2j+1} - 1}{2}, \qquad j \geqslant 0,\ [n < b < n^2,\ b \not\equiv 0] \text{ lub } [b \geqslant n^2,\ b \not\equiv k].$$

Sprawdzenie własności (1), (2) wymaga uciążliwego rozpatrywania wielu przypadków.