

# VIII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

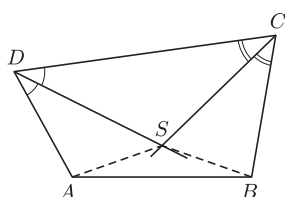
## Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego – część korespondencyjna

1 września – 29 października 2012 r.

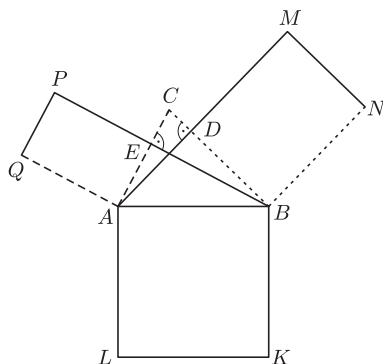
Rozwiązania poniższych zadań należy zapisywać **jednostronnie** na **oddzielnych** arkuszach formatu A4. Na każdej kartce z rozwiązaniem należy podać następujące informacje:

- w prawym górnym rogu numer zadania,
- w lewym górnym rogu dane uczestnika: imię i nazwisko, **numer PESEL**, adres domowy, nazwa i adres szkoły, klasa.

Rozwiązania zadań należy przesłać do Komitetu Okręgowego, właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia 29 października 2012 r. (decyduje data stempla pocztowego). Adresy Komitetów Okręgowych, informacje o kwalifikacji do zawodów stopnia drugiego, terminy kolejnych etapów OMG oraz inne bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem [www.omg.edu.pl](http://www.omg.edu.pl).



Zadanie 2



Zadanie 5

1. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej  $n$ , liczby  $n, n^5, n^9, n^{13}, n^{17}, \dots$

mają jednakowe cyfry jedności.

2. Dany jest czworokąt wypukły  $ABCD$ , w którym  $AD + BC = CD$ . Dwusieczne kątów  $BCD$  i  $CDA$  przecinają się w punkcie  $S$ . Udowodnij, że  $AS = BS$ .

3. Liczba naturalna  $n$  jest co najmniej trzycyfrowa. Jeżeli pomiędzy cyfrę setek a cyfrę dziesiątek tej liczby wpisujemy znak mnożenia, to po wykonaniu mnożenia otrzymamy połowę liczby  $n$ . Wyznacz wszystkie liczby  $n$  o tej własności.

4. W balu wzięło udział 102 królewiczów i 103 królowy. Po balu okazało się, że każdy królewicz zatańczył z taką samą liczbą królowy. Udowodnij, że pewne dwie królowy zatańczyły z taką samą liczbą królewiczów.

5. Odcinki  $AD$  i  $BE$  są wysokościami trójkąta ostrokątnego  $ABC$ . Po zewnętrznej stronie trójkąta  $ABC$  zbudowano kwadrat  $ABKL$  oraz prostokąty  $BDMN$  i  $AEPQ$ , przy czym  $BN = BC$  oraz  $AQ = AC$ . Udowodnij, że suma pól prostokątów  $BDMN$  i  $AEPQ$  jest równa polu kwadratu  $ABKL$ .

6. W ostrosłup  $SABCD$ , którego podstawą jest czworokąt wypukły  $ABCD$ , można wpisać sferę. Udowodnij, że

$$\sphericalangle ASB + \sphericalangle CSD = \sphericalangle BSC + \sphericalangle DSA.$$

7. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite  $n$ , dla których liczba  $n^3 - 7n$  jest kwadratem liczby całkowitej.

