LXIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

3 października 2012 r. – I seria,
5 listopada 2012 r. – II seria,
6 grudnia 2012 r. – III seria

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych oraz bieżące informacje, a także zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria
(3 września 2012 r. – – 3 października 2012 r.)

1. Dane są różne dodatnie liczby wymierne x i y, dla których liczba

$$w = \frac{x + \sqrt{y}}{y + \sqrt{x}}$$

jest wymierna. Wykazać, że obie liczby x i y są kwadratami liczb wymiernych.

2. Dany jest równoległobok $ABCD$ z kątem ostrym przy wierzchołku A. Zakładamy, że okrąg opisany na trójkącie ABD przecina boki CB i CD odpowiednio w punktach K i L różnych od wierzchołków. Niech odcinek AN będzie średnicą tego okręgu. Udowodnić, że punkt N jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CKL.

3. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wykazać, że jeżeli suma wszystkich jej dodatnich dzielników jest nieparzysta, to liczba n jest kwadratem lub podwojonym kwadratem liczby całkowitej.

4. Na tablicy narysowany jest 2012-kąt foremny. Michał i Jurek dorysowują na zmianę jedną przekątną, niemającą wspólnych punktów wewnętrznych ani wspólnych końców z wcześniej narysowanymi przekątnymi. Przegrywa ten z graczy, który nie może wykonać ruchu. Grę rozpoczyna Michał. Który z graczy ma strategię wygrywającą?

II seria
(4 października 2012 r. – – 5 listopada 2012 r.)

5. Wyznaczyć najmniejszą wartość wyrażenia $|20^m - 9^n|$, gdzie m i n są dodatnimi liczbami całkowitymi.

6. Punkty P, Q i R leżą odpowiednio na bokach BC, CA i AB trójkąta ABC, przy czym spełnione są równości $AR = RP = PC$ oraz $BR = RQ = QC$. Wykazać, że $AC + BC = 2AB$.

7. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BAD$, a sfera o środku S, dopisana do tego czworościanu, jest styczna do ściany ABC w środku okręgu opisanego na tej ścianie. Udowodnić, że proste AD i AS są prostopadłe.

(*Uwaga*: Sfera dopisana do czworościanu to sfera styczna do dokładnie jednej ściany oraz do trzech płaszczyzn zawierających pozostałe ściany.)

8. Na planszy o wymiarach $n \times n$ wyróżniono $2n - 1$ pól. Dowieść, że można pomalować pewną niezerową liczbę wyróżnionych pól na zielono w taki sposób, że:
- w każdym wierszu i w każdej kolumnie liczba zielonych pól jest parzysta,

albo
- w każdym wierszu i w każdej kolumnie liczba zielonych pól jest nieparzysta.

III seria
(6 listopada 2012 r. – – 6 grudnia 2012 r.)

9. Na płaszczyźnie ustawiono po jednym kamieniu w punktach o współrzędnych $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ i $(1,1)$. W jednym ruchu wybieramy dowolny kamień i przestawiamy go symetrycznie względem któregoś z pozostałych kamieni. Rozstrzygnąć, czy po skończonej liczbie ruchów trzy kamienie mogą znaleźć się na jednej prostej.

10. Dany jest prostopadłościan $ABCDA'B'C'D'$. Niech α, β i γ będą kątami utworzonymi przez przekątną AC' z krawędziami AB, AD i AA'. Udowodnić, że

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \leqslant \tfrac{3}{2}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

11. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych A i C przecinają się w punkcie P, a proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych B i D przecinają się w punkcie Q. Dowieść, że jeżeli kąt PAQ jest prosty, to również kąt PCQ jest prosty.

12. Zbadać, czy istnieje liczba całkowita większa od 2012^{2012}, której nie można przedstawić w postaci $x^2 + y^3 + z^6$, gdzie x, y i z są dodatnimi liczbami całkowitymi.