Klub 44

Rozwiązania zadań z numeru 4/2012

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

639. W trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego. Prosta CI przecina bok AB w punkcie D. Prowadzimy przez punkt D dowolną prostą, przecinającą okrąg opisany na trójkącie IAB w punktach P i Q. Wykazać, że prosta CI jest dwusieczną kąta PCQ.

640. Ciąg liczb całkowitych dodatnich $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ spełnia warunek

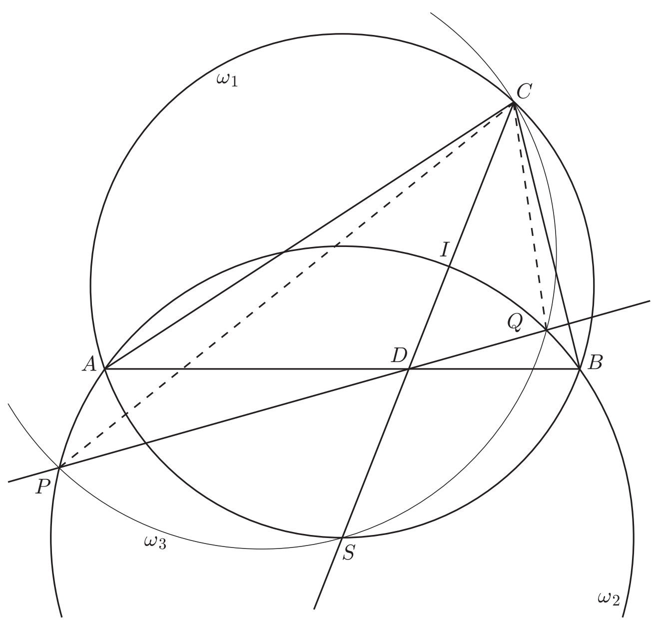
$$\frac{1}{a_1a_2} - \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{a_na_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3\ldots$$

Dowieść, że spełnia on również liniową zależność rekurencyjną

$$a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3\ldots$$

Wyznaczyć wszystkie pary współczynników (A, B) oraz wszystkie pary wyrazów początkowych (a_1, a_2), dla których ta rekurencja liniowa generuje ciąg (a_n), spełniający zadany na wstępie warunek.

639. Niech ω_1 i ω_2 będą (odpowiednio) okręgami opisanymi na trójkątach ABC i IAB. Dwusieczna CD kąta BCA, a raczej jej przedłużenie, przecina okrąg ω_1 w środku łuku AB. Oznaczmy ten punkt przez S. Zachodzi równość $|SA| = |SI| = |SB|$ (znana, a przy tym łatwa do wykazania). Punkt S jest więc środkiem okręgu ω_2. Zatem $|SP| = |SQ|$.



W punkcie D przecinają się cięciwy AB i CS okręgu ω_1, a także cięciwy AB i PQ okręgu ω_2. Tak więc

$$|CD| \cdot |DS| = |AD| \cdot |DB| = |PD| \cdot |DQ|.$$

Równość między skrajnymi iloczynami z kolei dowodzi, że istnieje okrąg ω_3, przechodzący przez punkty C, S, P, Q. Jego cięciwy SP i SQ mają jednakową długość, więc wyznaczają przystające łuki SP, SQ. Oparte na nich kąty PCS i QCS (wpisane w okrąg ω_3) są równe – a to jest teza zadania.

640. Niech L_n oznacza sumę po lewej stronie zależności, podanej na początku zadania, zaś P_n – ułamek po prawej stronie. Dla $n = 1$ mamy $P_1/L_1 = a_1^2$, zatem równość $L_1 = P_1$ wymusza wartość $a_1 = 1$. Dalej,

$$L_{n+1} - L_n = \frac{(-1)^n}{a_{n+1}a_{n+2}}, \qquad P_{n+1} - P_n = \frac{a_{n+1}^2 - a_na_{n+2}}{a_{n+1}a_{n+2}}.$$

Widać więc, że podana zależność jest spełniona dla wszystkich $n \geqslant 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy

(1) $\quad a_1 = 1 \quad$ oraz $\quad a_{n+1}^2 - a_na_{n+2} = (-1)^n \quad$ dla $n \geqslant 1$.

Jeżeli ciąg (a_n), spełniający ten warunek, miałby również spełniać rekurencję typu

(2) $$a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n$$

(z $a_1 = 1$), to dla $n = 1, 2$ mielibyśmy

$$\begin{cases} a_3 = Aa_2 + B \\ a_4 = Aa_3 + Ba_2 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} a_2^2 - a_3 = -1 \\ a_3^2 - a_2a_4 = 1. \end{cases}$$

Pierwsza para równości to układ równań liniowych (z niewiadomymi A, B) o wyznaczniku $a_2^2 - a_3 = -1 \neq 0$, więc mający dokładnie jedno rozwiązanie. Przy tym jest on spełniony dla $A = a_2$, $B = 1$ (co łatwo stwierdzić, korzystając z drugiej pary równości). Stąd wniosek, że *jedynym* kandydatem na postulowaną zależność rekurencyjną jest równanie

(3) $$a_{n+2} = a_2a_{n+1} + a_n \qquad \text{dla } n \geqslant 1,$$

z warunkiem początkowym $a_1 = 1$. Wprowadźmy oznaczenia:

$$D_n = a_{n+1}^2 - a_na_{n+2}, \qquad R_n = a_{n+2} - (a_2a_{n+1} + a_n)$$

i zauważmy, że (dla $n \geqslant 2$)

$$a_{n+1}R_{n-1} = a_{n+1}^2 - a_{n+1}(a_2a_n + a_{n-1}),$$
$$a_nR_n = a_na_{n+2} - a_n(a_2a_{n+1} + a_n),$$

skąd przez odjęcie stronami

(4) $$a_{n+1}R_{n-1} - a_nR_n = D_n + D_{n-1}.$$

Ponadto (wobec $a_1 = 1$) mamy: $D_1 + R_1 = -1$.

Wnioski: Jeżeli ciąg liczb całkowitych dodatnich (a_n) spełnia wyjściową zależność, czyli warunki (1), to dla wszystkich n mamy $D_n = (-1)^n$, więc prawa strona (4) ma stale wartość 0; przy tym $R_1 = -D_1 - 1 = 0$ i ze wzoru (4) wynika, że $R_n = 0$ dla wszystkich n – mamy zależność (3).

Na odwrót, jeśli równanie (3) (z wyrazem początkowym $a_1 = 1$ oraz dowolnym a_2) jest dla wszystkich n spełnione, czyli wszystkie R_n są zerami, to wobec (4): $D_n = -D_{n-1}$ dla $n \geqslant 2$; przy tym $D_1 = -R_1 - 1 = -1$, zatem $D_n = (-1)^n$ – a to jest zależność (1).

Ostatecznie więc, zadana na wstępie zależność jest równoważna rekurencji liniowej (2) z parametrami $B = a_1 = 1$, $A = a_2$ – dowolna liczba naturalna.