Klub 44

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 629 ($WT = 1{,}16$) i 630 ($WT = 2{,}82$) z numeru 11/2011

Paweł Kubit	Kraków	43,31
Tomasz Tkocz	Rybnik	42,75
Jerzy Cisło	Wrocław	40,37
Zbigniew Skalik	Wrocław	37,25
Roksana Słowik	Knurów	37,03
Michał Miodek	Zawiercie	35,88
Adam Dzedzej	Gdańsk	33,55

Rozwiązania zadań z numeru 3/2012

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

637. Znaleźć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 3$, dla których zbiór $\{1,\ldots,n\}$ daje się przedstawić jako suma trzech rozłącznych zbiorów o równych sumach elementów.

638. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $a+b+c \geqslant abc$. Udowodnić, że co najwyżej jedna z liczb

$$\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{c}, \qquad \frac{1}{3b}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{a}, \qquad \frac{1}{3c}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}$$

jest mniejsza od 1.

637. Jeśli takie rozbicie jest możliwe, to oczywiście suma liczb w zbiorze $\{1,\ldots,n\}$ musi być podzielna przez 3 – czyli iloczyn $n(n+1)$ musi dzielić się przez 6. To zaś ma miejsce jedynie dla liczb $n \not\equiv 1 \pmod 3$. Jest to więc warunek konieczny. Okazuje się, że dla $n > 3$ jest on też dostateczny (jasne, że dla $n = 3$ nie da się zbioru $\{1,2,3\}$ rozbić w żądany sposób).

Dla $n = 5, 6, 8, 9$ mamy, na przykład, takie rozbicia:

$$\{1,2,3,4,5\} = \{1,4\} \cup \{2,3\} \cup \{5\},$$
$$\{1,2,3,4,5,6\} = \{1,6\} \cup \{2,5\} \cup \{3,4\},$$
$$\{1,2,3,4,5,6,7,8\} = \{1,2,3,6\} \cup \{5,7\} \cup \{4,8\},$$
$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} = \{1,2,3,4,5\} \cup \{7,8\} \cup \{6,9\}.$$

A dalej działa indukcja ze skokiem o 6. Jeśli bowiem zbiór $\{1,\ldots,n\}$ da się przedstawić jako suma trzech rozłącznych podzbiorów o równych sumach elementów, to zbiór $\{1,\ldots,n+6\}$ też da się tak przedstawić – wystarczy dołączyć do pierwszego podzbioru liczby $n+1$ i $n+6$, do drugiego – liczby $n+2$ i $n+5$, wreszcie do trzeciego – liczby $n+3$ i $n+4$.

Szukanymi liczbami są więc wszystkie liczby $n > 3$, dla których $n-1$ nie dzieli się przez 3.

638. Przypuśćmy, wbrew dowodzonej tezie, że dwie spośród wymienionych liczb są mniejsze od 1; niech, na przykład,

$$\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{c} < 1, \qquad \frac{1}{3b}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{a} < 1.$$

Oznaczmy odwrotności liczb a, b, c odpowiednio przez x, y, z. Warunek $a+b+c \geqslant abc$ przybiera postać $yz+zx+xy \geqslant 1$; zaś dwie domniemane nierówności przepisujemy jako

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+z < 1, \qquad \frac{y}{3}+\frac{z}{2}+x < 1;$$

po pomnożeniu przez 6 otrzymujemy

$$2x+3y+6z < 6, \qquad 2y+3z+6x < 6.$$

Stąd przez dodanie stronami mamy $8x+5y+9z < 12$, czyli

$$y < \frac{12-8x-9z}{5}.$$

Uzyskujemy teraz ciąg nierówności

$$1 \leqslant yz+zx+xy < (x+z)\cdot\frac{12-8x-9z}{5}+zx =$$
$$= 1-\frac{1}{5}(2x-1)^2-\frac{1}{5}(2x+3z-2)^2 \leqslant 1.$$

Jest to oczekiwana sprzeczność, która kończy dowód.

Rozwiązanie zadania M 1356.

Równanie z treści zadania

$$1000a+100b+10c+d+1 = (10a+c+1)(10b+d+1)$$

jest równoważne następującemu:

$$100a(9-b)+10a(9-d)+10b(9-c)+c(9-d) = 0.$$

Ponieważ $a > 0$ i wszystkie składniki lewej strony są nieujemne, to musi być $b = d = 9$. Podobnie nierówność $b > 0$ implikuje, że $c = 9$. Otrzymujemy więc liczby

$$\overline{a999}, \qquad a \in \{1,\ldots,9\},$$

które, jak łatwo sprawdzić, spełniają ostatnie równanie. Są to więc wszystkie rozwiązania równania danego w treści zadania.