Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl

Zadania finałowe oraz ich rozwiązania znaleźć można na stronie olimpiady: www.om.edu.pl.

18 i 19 kwietnia odbyły sie zawody finałowe LXIII Olimpiady Matematycznej. Każdego dnia zawodów 104 uczniów z całej Polski, przez trzysta minut, rozwiązywało trzy zadania. Wszystkie bezbłędnie rozwiązał Maciej Dulęba z Wrocławia, a Igor Kotrasiński i Wojciech Nadara z Warszawy rozwiązali po pięć. Tym razem 97 finalistów rozwiązało przynajmniej jedno zadanie. Każdy z laureatów rozwiązał co najmniej trzy zadania, a wyróżnieni po dwa i pół. Finał był więc chyba nieco trudniejszy niż przed rokiem. Najtrudniejsze okazało się zadanie szóste, które rozwiązały tylko trzy osoby (średnia ocena to 0,17). Najłatwiejsze było zadanie czwarte, które rozwiązało 75 uczniów (średnia ocena to 4,14).

Niektórzy finaliści rozwiązali zadania w sposób raczej nieoczekiwany przez autorów zadań. Omówimy rozwiązania zadania pierwszego i piątego, oparte na pomysłach Bartłomieja Żaka i Barbary Mroczek.

Zadanie 1. *Rozstrzygnąć, czy istnieje taka dodatnia liczba wymierna w, niebędąca liczbą całkowitą, że potęga w^w jest liczbą wymierną.*

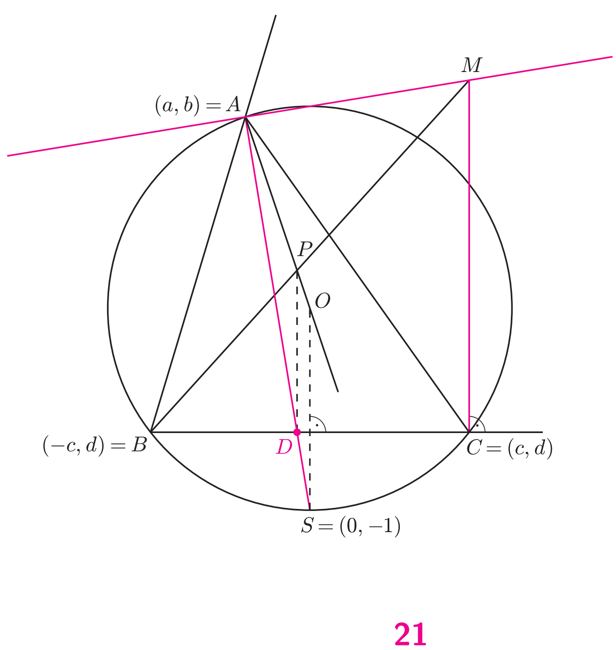
Załóżmy, że taka liczba w istnieje i zapiszmy ją w postaci nieskracalnego ułamka $\frac{a}{b}$ o dodatnim liczniku i mianowniku. Dla dowolnych liczb całkowitych m, n liczba

$$\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}\right)^m \cdot \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{b}}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{ma+nb}{b}}$$

jest wymierna jako iloczyn lub iloraz liczb wymiernych. Jedno z podstawowych twierdzeń elementarnej teorii liczb mówi, że:

dla dowolnych liczb całkowitych c, d istnieją takie liczby całkowite m, n, że $\mathrm{NWD}(c,d) = mc + nd$.

Istnieją więc takie liczby całkowite m, n, że $ma + nb = 1$, zatem liczba $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{b}}$ jest wymierna. Niech p, q oznaczają takie względnie pierwsze liczby naturalne, że $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{b}} = \frac{p}{q}$. Wtedy $a \cdot q^b = b \cdot p^b$. Wobec tego, że $\mathrm{NWD}(a,b) = 1$, liczba b jest dzielnikiem liczby q^b. Również liczba q^b jest dzielnikiem b, bo $\mathrm{NWD}(p^b, q^b) = 1$. Stąd wynika, że $q^b = b$. Nie jest to możliwe, bo $b \geqslant 2$ (liczba $\frac{a}{b}$ nie jest całkowita!), zatem $q^b \geqslant 2^b = (1+1)^b \geqslant 1 + b > b$.



Zadanie 5. *W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, a dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D. Niech M będzie takim punktem, że $MC \perp BC$ oraz $MA \perp AD$. Proste BM i OA przecinają się w punkcie P. Wykazać, że okrąg o środku P i przechodzący przez punkt A jest styczny do prostej BC.*

Przedstawione rozwiązanie jest prawie analityczne, oparte na idei, która zapewne powstała po przyjrzeniu się dokładnemu rysunkowi, który był w brudnopisie (zamieszczamy go na dole sąsiedniej szpalty). Niech $A = (a,b)$, $B = (-c,d)$, $C = (c,d)$, $O = (0,0)$, $d < 0 < c$. Ponieważ trójkąt ABC jest ostrokątny, więc $b > 0$. Możemy założyć, że promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy 1, więc $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$. Ponieważ $B \neq C$, więc $c \neq 0$, zatem $d > -1$. Niech D oznacza punkt wspólny boku BC i dwusiecznej kąta BAC. Jej równanie to $(b+1)x - ay = a$ (bo leżą na niej punkty A i $S = (0,-1)$ – środek łuku BC). Wobec tego $D = \left(a\frac{1+d}{1+b}, d\right)$. Równanie prostej $AM \perp AD$ to $ax + (b+1)y = a^2 + b^2 + b = 1 + b$, więc $M = \left(c, \frac{1+b-ac}{b+1}\right)$. Niech $P = (u,v)$. Mamy $bu = av$ oraz $\left(\frac{1+b-ac}{b+1} - d\right)(u+c) = 2c(v-d)$. Jeśli $a \neq 0$, to $v = \frac{bu}{a}$, więc $\left(\frac{1+b-ac}{b+1} - d\right)(u+c) = 2c\left(\frac{bu}{a} - d\right)$. Stąd

$$u = \frac{-cd - c\frac{1+b-ac}{b+1}}{\frac{1+b-ac}{b+1} - d - 2\frac{bc}{a}} = a\frac{-c(1+d)(1+b) + ac^2}{a(1+b)(1-d) - a^2c - 2bc(1+b)} = a\frac{-c(1+d)(1+b) + a(1-d^2)}{a(1+b)(1-d) - (1-b^2)c - 2bc(1+b)} = a \cdot \frac{1+d}{1+b} \cdot \frac{-c - bc + a - ad}{a - ad - c - bc} = a\frac{1+d}{1+b}.$$

Stąd wynika, że prosta PD jest równoległa do prostej SO, więc trójkąty AOS i APD są podobne, zatem $AP = PD \perp BC$, co kończy dowód twierdzenia. Jeśli $a = 0$, to $b = 1$, więc $u = 0$, zatem $(1-d)c = 2c(v-d)$ i $v = \frac{1}{2}(1+d)$, więc P jest środkiem odcinka $DA \perp BC$. Twierdzenie zachodzi również w tym przypadku.

Michał KRYCH