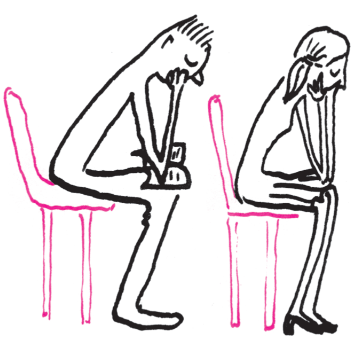
Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2012

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 627 ($WT = 2{,}50$) i 628 ($WT = 1{,}33$) z numeru 10/2011

Paweł Kubit	Kraków	42,27
Tomasz Tkocz	Rybnik	39,93
Zbigniew Skalik	Wrocław	37,25
Jerzy Cisło	Wrocław	36,67
Michał Miodek	Zawiercie	35,88
Roksana Słowik	Knurów	35,87
Adam Dzedzej	Gdańsk	32,39



Zadania z matematyki nr 643, 644

Redaguje Marcin E. KUCZMA

643. Wyznaczyć wszystkie pary (m, n) liczb całkowitych $m \geqslant 3$, $n \geqslant 6$, spełniające równanie
$$\binom{n}{6} = \frac{8m-4}{15m}\binom{m}{3}.$$

644. Dana jest liczba rzeczywista $\alpha > 1$. Obliczyć minimalną wartość funkcji
$$f(x) = (2-x)^{\alpha}(1+x^{\alpha})$$
na przedziale $\langle 0; 1\rangle$.

Zadanie 644 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2012

Przypominamy treść zadań:

635. Niech A, B, C, D, K będą pięcioma różnymi punktami, leżącymi na jednym okręgu. Odległości punktu K od prostych AB, BC, CD, DA wynoszą odpowiednio a, b, c, d. Znaleźć wzór algebraiczny, pozwalający wyznaczyć dowolną z liczb a, b, c, d, gdy znane są trzy pozostałe.

636. Ciąg (x_n) jest określony rekurencyjnie:
$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = \sqrt{1+\frac{1}{x_n^2}} - \frac{1}{x_n} \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$
Wykazać, że ciąg $(2^n x_n)$ jest zbieżny i obliczyć jego granicę.

635. Niech R będzie promieniem danego okręgu – opisanego na każdym z trójkątów KAB, KBC, KCD, KDA. Zachodzi równość
$$\frac{|AB|\cdot a}{2} = \frac{|AB|\cdot|KA|\cdot|KB|}{4R},$$
której obie strony wyrażają pole trójkąta KAB. Po uproszczeniu dostajemy pierwszą z wypisanych poniżej równości, a dalsze trzy są jej cyklicznymi odpowiednikami:
$$a = \frac{|KA|\cdot|KB|}{2R}, \qquad b = \frac{|KB|\cdot|KC|}{2R}, \qquad c = \frac{|KC|\cdot|KD|}{2R}, \qquad d = \frac{|KD|\cdot|KA|}{2R}.$$
Stąd wynika wzór, o który pyta zadanie: $ac = bd$.

636. Wyrazy ciągu (x_n) są liczbami dodatnimi. Zapiszmy każdy z nich jako tangens pewnego kąta ostrego:
$$x_n = \operatorname{tg}\alpha_n, \qquad 0 < \alpha_n < \pi/2.$$
Wykażemy, że $\alpha_n = 2\alpha_{n+1}$. Zaczynamy od oczywistej zależności
$$\operatorname{tg}(2\alpha_{n+1}) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha_{n+1}}{1-(\operatorname{tg}\alpha_{n+1})^2} = \frac{2x_{n+1}}{1-x_{n+1}^2}.$$
Przekształcamy mianownik ostatniego ułamka:
$$1 - x_{n+1}^2 = 1 - \left(\sqrt{1+\frac{1}{x_n^2}} - \frac{1}{x_n}\right)^2 = 1 - \left(1 + \frac{1}{x_n^2} - 2\cdot\frac{1}{x_n}\sqrt{1+\frac{1}{x_n^2}} + \frac{1}{x_n^2}\right) =$$
$$= \frac{2}{x_n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x_n^2}} - \frac{1}{x_n}\right) = \frac{2x_{n+1}}{x_n}.$$
Po podstawieniu do poprzedniej równości otrzymujemy związek
$$\operatorname{tg}(2\alpha_{n+1}) = x_n = \operatorname{tg}\alpha_n$$
i w konsekwencji $2\alpha_{n+1} = \alpha_n$ (obie liczby: $2\alpha_{n+1}$ i α_n leżą w przedziale $(0;\pi)$). Tak więc $\alpha_{n+1} = \alpha_n/2$ dla wszystkich n; a skoro $x_0 = 1$, czyli $\alpha_0 = \pi/4$, wnosimy stąd, że
$$\alpha_n = \frac{\pi}{2^{n+2}} \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$
Wystarczy teraz zauważyć, że $\alpha_n \to 0$ i skorzystać ze znanej relacji granicznej
$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = 1.$$
Otrzymujemy odpowiedź:
$$2^n x_n = 2^n \operatorname{tg}\alpha_n = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha_n}{\alpha_n} \to \frac{\pi}{4} \qquad \text{przy} \quad n \to \infty.$$

9. Policzymy wszystkie uściski dłoni, które się kiedykolwiek zdarzyły: niech $a_1, \ldots, a_s$ to będą liczby tych, którzy uścisnęli dłonie – odpowiednio – $P_1, \ldots, P_s$ osobom, natomiast $b_1, \ldots, b_k$ – liczby tych, którzy uścisnęli dłonie $N_1, \ldots, N_k$ osobom, przy czym $P_1, \ldots, P_s$ to liczby parzyste, $N_1, \ldots, N_k$ zaś – nieparzyste. Podwojona suma wszystkich uścisków to
$$a_1\cdot P_1 + \ldots + a_s\cdot P_s + {}$$
$$+ b_1\cdot N_1 + \ldots + b_k\cdot N_k$$
i jest to liczba podzielna przez 2, więc $b_1\cdot N_1 + \ldots + b_k\cdot N_k$ też jest podzielna przez 2. Interesuje nas suma $b_1 + \ldots + b_k$, która również jest liczbą parzystą, bo parzystość liczby $b_i\cdot N_i$ jest dla każdego i taka sama, jak parzystość b_i.