# Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2012

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

## Zadania z matematyki nr 637, 638

*Redaguje Marcin E. KUCZMA*

**637.** Znaleźć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 3$, dla których zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$ daje się przedstawić jako suma trzech rozłącznych zbiorów o równych sumach elementów.

**638.** Liczby dodatnie $a, b, c$ spełniają warunek $a + b + c \geqslant abc$. Udowodnić, że co najwyżej jedna z liczb

$$\frac{1}{3a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{c}, \qquad \frac{1}{3b} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{a}, \qquad \frac{1}{3c} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{b}$$

jest mniejsza od 1.

Zadanie 638 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

## Rozwiązania zadań z numeru 11/2011

Przypominamy treść zadań:

**629.** Niech $n$ będzie liczbą naturalną większą od 2. Dowieść, że ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ można usunąć dwie liczby tak, by suma liczb, które pozostały, była kwadratem liczby naturalnej.

**630.** W trójkącie ostrokątnym o bokach długości $a, b, c$ środkowa poprowadzona do boku $c$ ma długość $d$. Wykazać, że dla każdej liczby dodatniej $p < 2$ zachodzi nierówność

$$a^p + b^p > \left(d + \frac{c}{2}\right)^p + \left(d - \frac{c}{2}\right)^p.$$

**629.** Suma wszystkich liczb w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$ wynosi $S = n(n+1)/2$. Suma dwóch liczb z tego zbioru może być dowolną liczbą naturalną od 3 do $2n-1$. Usuwamy dwie – suma liczb, które pozostały, może być dowolną liczbą naturalną od $S - 2n + 1$ do $S - 3$. Wystarczy wykazać, że w przedziale $\langle S - 2n + 1; S - 3\rangle$ znajduje się jakiś kwadrat liczby naturalnej.

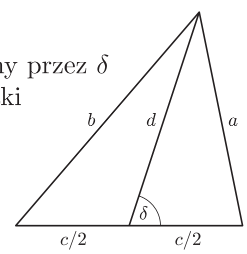
Niech $m$ będzie największą liczbą naturalną, której kwadrat nie przekracza $S - 3$. Wówczas $(m+1)^2 > S - 3$, skąd $m^2 + 2m \geqslant S - 3$, czyli $m^2 \geqslant S - 3 - 2m$. Wystarczy wykazać, że prawa strona ostatniej nierówności jest nie mniejsza niż $S - 2n + 1$; czyli że zachodzi nierówność $m \leqslant n - 2$.

Dla $n = 3, 4, 5, 6$ różnica $S - 3$ wynosi kolejno $3, 7, 12, 18$, co daje wartości $m = 1, 2, 3, 4$; mamy równość $m = n - 2$.

Dla $n \geqslant 7$ szacujemy kwadrat liczby $m$:

$$m^2 \leqslant S - 3 = \frac{n^2 + n}{2} - 3 = $$
$$= (n-2)^2 - \frac{(n-2)(n-7)}{2} \leqslant (n-2)^2$$

i dostajemy nierówność $m \leqslant n - 2$, którą chcieliśmy wykazać.




**630.** Przyjmijmy, że $a \leqslant b$ i oznaczmy przez $\delta$ miarę kąta ostrego (lub prostego), jaki zadana środkowa tworzy z prostą, zawierającą bok $c$. Jest to kąt wewnętrzny w trójkącie o bokach długości $a, c/2, d$, przeciwległy bokowi $a$. Ze wzoru kosinusów:

$$a^2 = d^2 + \frac{c^2}{4} - cd\cos\delta, \qquad b^2 = d^2 + \frac{c^2}{4} + cd\cos\delta.$$

Przepiszmy te związki w postaci

$$a^2 - \left(d - \frac{c}{2}\right)^2 = cd(1 - \cos\delta) = \left(d + \frac{c}{2}\right)^2 - b^2.$$

Wiadomo, że jeśli $F$ jest funkcją ściśle wklęsłą (w pewnym przedziale) i jeśli $k$ jest stałą dodatnią, to funkcja $G(x) = F(x + k) - F(x)$ jest ściśle malejąca. Zastosujmy tę własność do funkcji $F(x) = x^{p/2}$ (ściśle wklęsłej w przedziale $(0; \infty)$, skoro $0 < p < 2$) oraz do stałej dodatniej $k = cd(1 - \cos\delta)$. Tworzymy funkcję malejącą $G(x) = (x + k)^{p/2} - x^{p/2}$.

Zauważmy, że $(d - c/2)^2 < b^2$ (równoważnie: $|d - c/2| < b$; jest to nierówność dla boków jednego z trójkątów, na które środkowa dzieli trójkąt wyjściowy). Zatem

$$G\Big(\Big(d - \frac{c}{2}\Big)^2\Big) > G(b^2),$$

czyli

$$\left(\left(d - \frac{c}{2}\right)^2 + k\right)^{p/2} - \left(d - \frac{c}{2}\right)^p > (b^2 + k)^{p/2} - b^p.$$

Pamiętamy jednak, że $(d - c/2)^2 + k = a^2$, $b^2 + k = (d + c/2)^2$. Otrzymujemy nierówność

$$a^p - \left(d - \frac{c}{2}\right)^p > \left(d + \frac{c}{2}\right)^p - b^p$$

– czyli tezę zadania.