Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2012

Zadania z matematyki nr 635, 636

Redaguje Marcin E. KUCZMA

635. Niech A, B, C, D, K będą pięcioma różnymi punktami, leżącymi na jednym okręgu. Odległości punktu K od prostych AB, BC, CD, DA wynoszą odpowiednio a, b, c, d. Znaleźć wzór algebraiczny, pozwalający wyznaczyć dowolną z liczb a, b, c, d, gdy znane są trzy pozostałe.

636. Ciąg (x_n) jest określony rekurencyjnie:

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{x_n^2}} - \frac{1}{x_n} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Wykazać, że ciąg $(2^n x_n)$ jest zbieżny i obliczyć jego granicę.

Zadanie 636 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2011

Przypominamy treść zadań:

627. W okienka tabeli prostokątnej o rozmiarach $n \times 2$ (n wierszy, 2 kolumny, $n > 2$) wpisujemy liczby od 1 do $2n$, losowo, z jednakowym prawdopodobieństwem każdego rozmieszczenia. Które z następujących zdarzeń jest bardziej prawdopodobne?

(A) W dokładnie jednym wierszu znajdzie się para liczb różniących się o 1.
(B) W żadnym wierszu nie znajdzie się para liczb różniących się o 1.

628. Niech $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ściśle rosnącą, odwzorowującą zbiór wszystkich liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ na cały zbiór $\mathbb{Q}$. Czy stąd wynika, że funkcja f jest przedziałami liniowa (tzn. że $\mathbb{R}$ jest sumą skończenie lub nieskończenie wielu przedziałów dodatniej długości, o rozłącznych wnętrzach, i w każdym z tych przedziałów f jest liniowa)?

627. Weźmy pod uwagę dowolne rozmieszczenie typu (B). Niech m będzie liczbą sąsiadującą w wierszu z liczbą 1; zatem $m \geqslant 3$. Wykonujemy następującą operację:

Każdą liczbę $k \in \{2, \ldots, m-1\}$ zmniejszamy o 1, zaś jedynkę zastępujemy przez $m-1$; pozostałych liczb nie zmieniamy. (Na ilustracji przykładowe rozmieszczenie typu (B) dla $n = 5$, w którym $m = 7$, oraz nowe rozmieszczenie, powstałe w wyniku opisanej operacji).

$$\begin{array}{rr} 5 & 8 \\ 10 & 6 \\ 2 & 4 \\ 7 & 1 \\ 9 & 3 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rr} 4 & 8 \\ 10 & 5 \\ 1 & 3 \\ 7 & 6 \\ 9 & 2 \end{array}$$

W nowym rozmieszczeniu widzimy wiersz, w którym sąsiadują ze sobą dwie liczby różniące się o 1, mianowicie $m-1$ i m. Jest to jedyny taki wiersz – bowiem w pozostałych wierszach moduł różnicy między oboma wyrazami albo się zwiększył, albo pozostał niezmieniony. Uzyskaliśmy więc rozmieszczenie typu (A).

Zauważmy, że widząc uzyskane rozmieszczenie, jesteśmy w stanie jednoznacznie odtworzyć rozmieszczenie wyjściowe: mamy wiersz z liczbami $m-1$ i m; trzeba zastąpić $m-1$ przez jedynkę, zaś każdą liczbę $j \in \{1, \ldots, m-2\}$ trzeba zwiększyć o 1.

Opisana operacja określa zatem różnowartościową funkcję ze zbioru rozmieszczeń typu (B) do zbioru rozmieszczeń typu (A). Jednak *nie na cały* ów zbiór. Przecież rozmieszczenie typu (A) może mieć w jednym wierszu liczby 1, 2 (a w pozostałych wierszach pary liczb, różniących się więcej niż o 1). Natomiast opisana operacja produkuje rozmieszczenia z pojedynczymi wierszami postaci $[m-1, m]$ lub $[m, m-1]$, gdzie $m \geqslant 3$.

Wniosek: jest więcej rozmieszczeń typu (A); wylosowanie takiego rozmieszczenia jest bardziej prawdopodobne niż typu (B).

628. Nie wynika. Prosty kontrprzykład: określamy funkcję f najpierw w przedziale $\langle 0; 1\rangle$ wzorem

$$f(x) = \frac{x}{2-x} = \frac{2}{2-x} - 1 \qquad \text{dla } x \in \langle 0; 1\rangle.$$

Jest ona w tym przedziale ściśle rosnąca, ściśle wypukła i odwzorowuje przedział $\langle 0; 1\rangle$ na cały ten przedział; łatwo wyznaczyć funkcję odwrotną:

$$f^{-1}(y) = \frac{2y}{1+y} = 2 - \frac{2}{1+y} \qquad \text{dla } y \in \langle 0; 1\rangle.$$

Widać, że jeżeli x, y są liczbami wymiernymi z przedziału $\langle 0; 1\rangle$, to $f(x)$, $f^{-1}(y)$ też są liczbami wymiernymi z przedziału $\langle 0; 1\rangle$. Zatem obrazem zbioru $\mathbb{Q} \cap \langle 0; 1\rangle$ jest ten sam zbiór.

Lista uczestników ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 623 ($WT = 1{,}09$) i 624 ($WT = 2{,}27$) z numeru 6/2011

Piotr Sobczak	44,68
Tomasz Warszawski	2–42,26
Paweł Kubit	4–40,94
Janusz Olszewski	12–40,27
Tomasz Tkocz	2–38,41
Zbigniew Skalik	1–37,25
Michał Miodek	35,88
Roksana Słowik	34,62
Zbigniew Sewartowski	1–31,04
Rami Marcin Ayoush	30,55
Jan Czardybon	30,48
Andrzej Daniluk	2–29,74
Andrzej Dorobisz	29,11
Adam Dzedzej	1–28,56
Jerzy Cisło	8–28,30
Paweł Łabędzki	26,92
Krzysztof Kamiński	1–25,94
Tomasz Kochanek	24,75
Witold Bednarek	5–24,70
Jerzy Witkowski	5–24,14
Tomasz Wietecha	8–23,80
Tomasz Czajka	23,20
Andrzej Idzik	1–22,68
Krzysztof Dorobisz	3–22,64
Michał Koźlik	22,17

Legenda (przykładowo): stan konta 8–23,80 oznacza, że uczestnik już ośmiokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (dziewiątej) rundzie ma 23,80 punktu.

W tej kolejce 44 punkty przekroczył **Piotr Sobczak** – to nowe nazwisko w naszym Klubie.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

- stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
- przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2009, 2010 lub 2011.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Rozszerzamy f do funkcji $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, przesuwając jej wykres o wektor $[1,1]$ i jego całkowite wielokrotności. Formalnie: przyjmujemy

$$f(k+r) = k + f(r) \quad \text{dla} \quad k \in \mathbb{Z},\ r \in \langle 0;1).$$

Tak rozszerzona funkcja f jest ściśle rosnąca; w każdym z przedziałów $\langle k; k+1\rangle$ jest ściśle wypukła – więc nie jest liniowa w żadnym przedziale długości dodatniej. Wreszcie, jest jasne, że obrazem zbioru $\mathbb{Q}$ jest cały zbiór $\mathbb{Q}$.

* * *

Początek tegorocznego omówienia ligi zadaniowej można by właściwie skopiować z omówienia zeszłorocznego: było kilka bardzo fajnych zadań – a najlepsze zadania pochodziły z propozycji uczestników ligi.

Na szczególną uwagę zasługuje niebanalna nierówność (**616**) oraz intrygująca konfiguracja geometryczna (**618**). W obu tych zadaniach – jak i w paru innych, włączonych do omówienia – to uczestnicy znajdowali najciekawsze rozwiązania, bardzo oryginalne i z reguły zgrabniejsze od proponowanych przez nas rozwiązań „firmowych".

Jak co roku, przedstawiamy wybrane rozwiązania, w formie (z konieczności) bardzo skrótowej. Wszystkich Czytelników, którzy lubią tego typu zadania, mocno zachęcamy do uzupełnienia szczegółów w owych rozumowaniach i do ich starannego prześledzenia; one naprawdę na to zasługują.

Niebagatelny udział w ich dostarczaniu miał uczestnik, będący aktualnie niezagrożonym liderem zmagań ligowych – mający w dorobku dwanaście czterdziestoczteropunktowych rund. I nic nie wskazuje, by którakolwiek kolejna runda miała być już ostatnią!...

Zadanie **607** [$X = \{1, \ldots, n\}$, $n > 3$; znaleźć $\max m : \exists\, A_1, \ldots, A_m \subset X\ \forall\, i,j\ (i \neq j)$: $A_i \not\subset A_j$, $|A_i| \neq |A_j|$] (współczynnik trudności $WT = 2{,}59$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 8$). Odpowiedź: $\max m = n-2$. Łatwo uzyskać oszacowanie $m \leqslant n-2$, trudniej wykonać konstrukcję, realizującą równość. W prawie wszystkich pracach (**R. M. Ayoush**, **T. Cieśla**, **J. Cisło**, **A. Jóźwik**, **T. Kochanek**, **P. Kumor**, **W. Nadara**) była to indukcja względem n, jak w rozwiązaniu firmowym. Z jednym wyjątkiem (**J. Olszewski**) – metoda zaskakująca oryginalnością: $A_1 = \{1\}$, $A_{n-2} = \{3, 4, \ldots, n\}$;

dla $1 < k \leqslant \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$: $\qquad A_k = \{2i : 1 \leqslant i \leqslant k-1\} \cup \{2k-1\}$;

dla $\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor < k < n-2$: $\quad A_k = \{2i : 1 \leqslant i \leqslant n-2-k\} \cup \{j : 2n-1-2k \leqslant j \leqslant n\}$

(aby zrozumieć, jak to działa, warto dla ilustracji wypisać sobie te zbiory dla kilku niewielkich wartości n). Wszystko się zgadza! (sprawdzenie zupełnie mechaniczne).

Zadanie **610** [$a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \geqslant 3)$; $k \geqslant 0 \Rightarrow \forall\, n$: $a_n \not\equiv 0 \pmod{8k+5}$] ($WT = 3{,}03$; $LPR = 3$). Trzy dobre rozwiązania (**T. Kochanek**, **J. Olszewski**, **J. Cisło**) nie różniły się istotnie od rozwiązania firmowego (**M. Kieza**).

Zadanie **613** [Skończenie wiele okręgów na płaszczyźnie, każdy styczny zewnętrznie do pięciu innych] ($WT = 2{,}66$; $LPR = 10$ (13?)). Zadanie okazało się dobrze znane i łatwe do znalezienia w różnych publikacjach – z reguły z następującym rozwiązaniem: okręgi wpisane w ściany dwunastościanu foremnego leżą na jednej sferze; każdy jest styczny do pięciu innych; rzut stereograficzny z dowolnego punktu sfery, położonego „na zewnątrz" wszystkich tych dwunastu okręgów, przenosi je na płaszczyznę.

Takie właśnie rozwiązanie znalazło się we wszystkich pracach, ocenionych maksymalnie. Nieco niższe oceny (z powodu luk w uzasadnieniach) otrzymały prace, w których rozumowanie nie wychodziło poza płaszczyznę (lokalizacja środków okręgów w punktach przecięcia różnych stożkowych bądź też ciągła deformacja pewnej konfiguracji wyjściowej, aż do osiągnięcia konfiguracji wymaganej); uzyskiwano różne liczby okręgów, niekoniecznie dwanaście.

Mniej niż 12 się nie da; zaś liczby 5 z treści zadania nie można zastąpić większą; takim komentarzem, z uzasadnieniem, opatrzyli swoje prace **R. M. Ayoush** oraz **B. Romański**.

Zadanie **616** [$\forall\, x,y,z > 0$: $\dfrac{(y+z)^2}{x^2+yz} + \dfrac{(z+x)^2}{y^2+zx} + \dfrac{(x+y)^2}{z^2+xy} \geqslant 6$] ($WT = 3{,}36$; $LPR = 5$). Tożsamość z rozwiązania firmowego znaleźli **Paweł Najman** oraz **Janusz Olszewski**, który podał jeszcze dwa inne dowody (!); oto ich skróty.

Drugi dowód: po przemnożeniu przez wspólny mianownik i przegrupowaniu dostajemy do udowodnienia, że $A_x + A_y + A_z \geqslant 0$, gdzie $A_x = (y-z)^2(y+z)(y+z-x)(x^2+yz)$ [A_y, A_z analogicznie]. Przyjmując $x \geqslant y \geqslant z$, mamy (nietrudno)

$$x^2(y^2+xz) \geqslant y^2(x^2+yz),\ \ y^2(x-z)^2 \geqslant x^2(y-z)^2,\ \ x+z \geqslant y+z,\ \ x+z-y \geqslant x-y-z;$$

wymnożenie stronami daje (po skróceniu przez x^2y^2 i przekształceniu) nierówność $A_x + A_y \geqslant 0$; oczywiście $A_z \geqslant 0$; gotowe!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, *J. Ciach* (5), M. Prauza (4), P. Kumor (11), *P. Gadziński* (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (12), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (8), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Peczarski, M. Adamaszek, P. Kubit (4), J. Cisło (8), W. Bednarek (5), D. Kurpiel, P. Najman (5), M. Kieza (4), M. Kasperski, K. Dorobisz, A. Woryna

(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni": Z. Bartold, A. Czornik, A. Daniluk, Z. Galias, P. Jędrzejewicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, S. Solecki, T. Tkocz, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni": T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, A. Dzedzej, P. Figurny, M. Fiszer, Ł. Garncarek, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, A. Idzik, K. Jachacy, M. Jastrzębski, A. Jóźwik, K. Kamiński, G. Karpowicz, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, M. Łupieżowiec, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, F. S. Sikorski, Z. Skalik, A. Smolczyk, P. Sobczak, M. Spychała, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, *K. Trautman*, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Trzeci dowód: stosując nierówność Cauchy'ego–Schwarza, mamy

$$\sum(x^2+yz)(y+z)^2\cdot\sum\frac{(y+z)^2}{x^2+yz}\geqslant\Big(\sum(y+z)^2\Big)^2$$

(sumy (x,y,z)-cykliczne); wystarczy więc dowieść, że

$$(1)\qquad \Big(\sum(y+z)^2\Big)^2-6\sum(x^2+yz)(y+z)^2\geqslant 0$$

– a to prawda, bo lewa strona (1) da się zapisać jako $6R+4S$, gdzie $R=\sum yz(y-z)^2\geqslant 0$, $S=\sum x^2(x-y)(x-z)\geqslant 0$ (nierówność Schura).

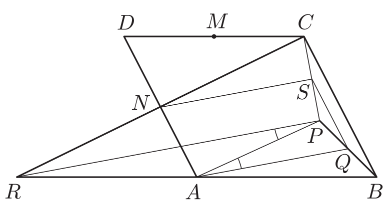
Bardzo oryginalne (niesymetryczne) przegrupowanie składników zadanej nierówności (po uprzednim pomnożeniu przez wspólny mianownik) wymyślił **Piotr Sobczak**, zapisując nierówność w postaci

$$(2)\qquad p_1p_2p_3p_4+q_1q_2q_3q_4\geqslant 0,$$

gdzie $p_1=2x^2-y^2-z^2$, $p_2=x-z$, $p_3=x-y+z$, $p_4=y^2+xz$, zaś q_i powstaje z p_i przez zamianę $x\leftrightarrow y$. Przyjmując $x\geqslant y\geqslant z$, mamy wszystkie $p_i\geqslant 0$; ponadto $q_2,q_4\geqslant 0$. Jeżeli teraz $q_1q_3\geqslant 0$, to (2) zachodzi. Pozostaje możliwość, że albo $q_1<0<q_3$, albo $q_1>0>q_3$. Nietrudno pokazać, że w pierwszym przypadku $p_1\geqslant -q_1$, $p_2\geqslant q_2$, $p_3p_4\geqslant q_3q_4$, a w drugim $p_1p_4\geqslant q_1q_4$, $p_2p_3\geqslant -q_2q_3$; w każdym z tych przypadków wymnożenie napisanych nierówności prowadzi wprost do tezy (2).

Witold Bednarek także zauważył (korzystając z wypukłości funkcji $t\mapsto 1/t$), że wystarczy udowodnić nierówność (1). Zakładając, że $x\geqslant y\geqslant z$, i traktując y, z jako ustalone, wykazał, że lewa strona (1) jest niemalejącą funkcją zmiennej $x\in\langle y;\infty)$ (analiza pochodnych pierwszego i drugiego rzędu). Teza (1) zachodzi dla $x=y$, więc i dla wszystkich $x\geqslant y$.

Jeszcze jedno rozwiązanie z użyciem pochodnych, bardziej uciążliwe rachunkowo, ale bezbłędne, przedstawił **Zbigniew Sewartowski**.



Zadanie **618** [Równoległobok $ABCD$; punkt P wewnątrz; M,N – środki CD, AD; $|MP|=|MA|$; $|NP|=|NC|$; Q – środek $BP\Rightarrow|\sphericalangle PAQ|=|\sphericalangle PCQ|$] ($WT=3{,}47$; $LPR=3$). Cztery świetne dowody, zgrabniejsze niż firmowy (nie kłóci się to z równością $LPR=3$, bo dwa dowody są w pracy jednego uczestnika – zgadnijcie, kogo).

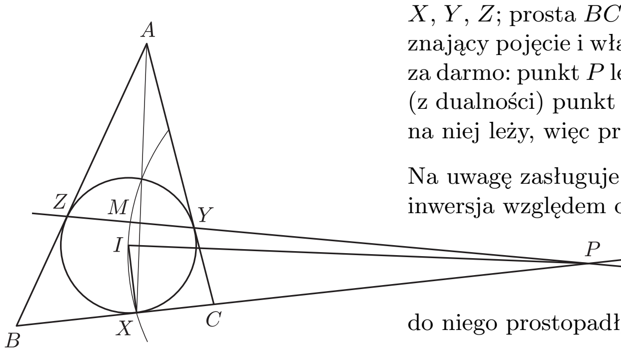
Jerzy Cisło i **Janusz Olszewski** rozumują tak: proste AB i CN przecinają się w punkcie R; kąt CPR jest prosty (oparty na średnicy okręgu o środku N). Punkt A jest środkiem BR, więc $AQ\|RP$; stąd $|\sphericalangle PAQ|=|\sphericalangle APR|=|\sphericalangle APC|-90^\circ$. Analogicznie $|\sphericalangle PCQ|=|\sphericalangle APC|-90^\circ$ (podobne to trochę do firmowego, ale jednak prostsze).

Marek Spychała i **Janusz Olszewski** (drugi sposób!) wprowadzają środek S odcinka CP, powstaje równoległobok $ANSQ$. Odcinek CP jest prostopadły do swojej symetralnej NS, więc i do prostej AQ. Analogicznie $AP\perp CQ$. Zatem P to ortocentrum trójkąta ACQ i teza gotowa.

Zadanie **619** [Szachownica $n\times n$ pokryta płytkami 2×2; liczba płytek $>\ 2(n^2-n)/3$ $\Rightarrow$ można usunąć jedną płytkę, szachownica nadal będzie pokryta] ($WT=2{,}65$; $LPR=6$). Dobre rozwiązania (**R. M. Ayoush**, **J. Cisło**, **J. Fiett**, **T. Kochanek**, **M. Miodek**, **J. Olszewski**) w większości nie odbiegały od firmowego; jedno lub dwa były bardziej zawiłe.

J. Olszewski wskazał ponadto możliwość wzmocnienia wyniku (przez bardziej staranne zliczanie krotności pokrycia pól szachownicy): dla $n\geqslant 7$ teza zachodzi już przy założeniu, że liczba płytek $>\ 4n^2/7$.

Zadanie **621** [$\triangle ABC$; okrąg wpisany (środek I) styczny do BC, CA, AB w punktach X, Y, Z; prosta BC przecina YZ w $P\Rightarrow IP\perp AX$] ($WT=3{,}00$; $LPR=8$). Uczestnicy znający pojęcie i własności biegunowej (**R. M. Ayoush**, **J. Garnek**) mieli zadanie wręcz za darmo: punkt P leży na biegunowej (YZ) punktu A względem okręgu wpisanego, zatem (z dualności) punkt A leży na biegunowej punktu P względem tego okręgu. Punkt X też na niej leży, więc prosta AX jest ową biegunową – oczywiście prostopadłą do IP.



Na uwagę zasługuje też eleganckie rozwiązanie, które podał **Tomasz Kochanek**: inwersja względem okręgu wpisanego przekształca prostą AX na pewien okrąg, przechodzący przez punkt I (środek inwersji) i przez punkty X oraz M – środek odcinka YZ (obraz punktu A). Kąty IXP, IMP są proste, zatem odcinek IP jest średnicą tego okręgu – jest więc do niego prostopadły. Inwersja zachowuje prostopadłość; stąd $IP\perp AX$.

Inne dobre rozwiązania: **J. Cisło**, **J. Olszewski**, **T. Wietecha**, **P. Sobczak**, **P. Najman**.