Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2011

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 615 ($WT = 1{,}65$) i 616 ($WT = 3{,}36$) z numeru 2/2011

Bartłomiej Dyda	Wrocław	42,99
Paweł Najman	Kraków	42,77
Piotr Sobczak	Łódź	38,09
Tomasz Tkocz	Rybnik	37,14
Zbigniew Skalik	Wrocław	35,98
Paweł Kubit	Kraków	34,44

Zadania z matematyki nr 627, 628

Redaguje Marcin E. KUCZMA

627. W okienka tabeli prostokątnej o rozmiarach $n \times 2$ (n wierszy, 2 kolumny, $n > 2$) wpisujemy liczby od 1 do $2n$, losowo, z jednakowym prawdopodobieństwem każdego rozmieszczenia. Które z następujących zdarzeń jest bardziej prawdopodobne?

(A) W dokładnie jednym wierszu znajdzie się para liczb różniących się o 1.
(B) W żadnym wierszu nie znajdzie się para liczb różniących się o 1.

628. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ściśle rosnącą, odwzorowującą zbiór wszystkich liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ na cały zbiór $\mathbb{Q}$. Czy stąd wynika, że funkcja f jest przedziałami liniowa (tzn. że $\mathbb{R}$ jest sumą skończenie lub nieskończenie wielu przedziałów dodatniej długości, o rozłącznych wnętrzach, i w każdym z tych przedziałów f jest liniowa)?

Zadanie 628 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2011

Przypominamy treść zadań:

623. Czy można umieścić w polach szachownicy $n \times n$ liczby $1, \ldots, n^2$ tak, by w każdym wierszu suma liczb była całkowitą potęgą dwójki?

624. Niech k będzie liczbą naturalną większą od 1. Dla jakich dodatnich liczb rzeczywistych b można znaleźć funkcję f, ciągłą na przedziale $\langle 0; b)$, różniczkowalną wewnątrz tego przedziału oraz spełniającą warunki: $f(0) = 1$, $f'(x) \geqslant f(x)^k$ dla $x \in \langle 0; b)$?

623. Nie można, jeśli $n > 1$. Przypuśćmy, że to się udało i niech 2^m będzie minimalną sumą liczb w wierszu. Jest ona dzielnikiem sumy liczb w każdym wierszu, więc i sumy liczb we wszystkich wierszach, równej $n^2(n^2+1)/2$. Jasne, że $m > 0$. Zatem liczba $n^2(n^2+1)/2$ musi być parzysta, co oznacza, że n jest liczbą parzystą. Liczba 2^m, względnie pierwsza z czynnikiem (n^2+1), musi dzielić $n^2/2$. To już daje sprzeczność, bowiem $2^m \geqslant 1 + \ldots + n = (n^2+n)/2$.

624. Niech f będzie funkcją, spełniającą podane warunki. Zauważmy, że $f(x) > 0$ w przedziale $\langle 0; b)$ (w przeciwnym razie, oznaczając przez β najmniejsze miejsce zerowe funkcji f, mielibyśmy w przedziale $\langle 0; \beta)$ nierówności $f(x) > 0$, $f'(x) \geqslant f(x)^k > 0$, skąd $f(\beta) \geqslant f(0)$, czyli $0 \geqslant 1$).

Weźmy pod uwagę funkcję $g(x) = -f(x)^{1-k}$ z pochodną
$$g'(x) = (k-1)f(x)^{-k}f'(x) \geqslant k-1.$$
Dostajemy oszacowanie
$$g(x) \geqslant g(0) + (k-1)x = -1 + (k-1)x \qquad \text{dla } x \in \langle 0; b).$$
Ale wartości funkcji g w przedziale $\langle 0; b)$ są ujemne. Tak więc $(k-1)x < 1$ dla wszystkich $x \in \langle 0; b)$; to znaczy, że liczba $1/(k-1)$ nie należy do tego przedziału – czyli zachodzi nierówność $b \leqslant 1/(k-1)$.

Na odwrót, jeżeli $b \leqslant 1/(k-1)$, to określamy funkcję f wzorem
$$f(x) = ((1-k)x+1)^{1/(1-k)} \qquad \text{dla } x \in \langle 0; b)$$
(suma w nawiasie jest dodatnia w tym przedziale, więc określenie jest poprawne). Ma ona wymagane własności: $f(0) = 1$, $f'(x) = f(x)^k$.

Stąd odpowiedź: liczby b, o które pyta zadanie, są scharakteryzowane nierównością $b \leqslant 1/(k-1)$.

Siatki, grafy, wielościany – odpowiedzi

$\mathfrak{a}$ – {4, 7, 8, 11} – {c, d, h, j}; $\mathfrak{b}$ – {1, 3, 10} – {a, b, k}; $\mathfrak{c}$ – {2, 9} – {e, g}; $\mathfrak{d}$ – 5 – i; $\mathfrak{e}$ – 6 – f.

a – II; b – X; c – I; d – V; e – VII; f – VI; g – IX; h – III; i – VIII; j – XI; k – IV.

α – {III, X, XI} – {A, E, H}; β – {I, II, IX} – {G, I, K}; γ – {VI, VIII} – {C, F}; δ – IV – J; ε – VII – D; φ – V – B.

A – 4; B – 11; C – 5; D – 9; E – 1; F – 6; G – 2; H – 8; I – 7; J – 10; K – 3.