LXIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

3 października 2011 r. – I seria,
3 listopada 2011 r. – II seria,
5 grudnia 2011 r. – III seria

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych oraz bieżące informacje, a także zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} (x+y)^3 = 8z, \\ (y+z)^3 = 8x, \\ (z+x)^3 = 8y. \end{cases}$$

2. Znaleźć wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych (x, y), że liczba $2^x + 5^y$ jest kwadratem liczby całkowitej.

3. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AC i BC, przy czym $AE = AD$ i $BF = BD$. Punkt S jest symetryczny do punktu C względem środka okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykazać, że $SE = SF$.

4. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 1$. Dla niepustego podzbioru X zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ niech a i b oznaczają odpowiednio najmniejszy i największy element zbioru X oraz niech

$$f(X) = \frac{1}{n-(b-a)}.$$

Wyznaczyć, w zależności od n, sumę liczb $f(X)$ dla wszystkich niepustych podzbiorów X zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$.

II seria

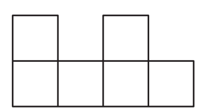
5. Znaleźć wszystkie takie ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_{63})$ złożone z różnych dodatnich liczb całkowitych, że dla $i = 1, 2, \ldots, 62$ liczba a_i jest dzielnikiem liczby $1 + a_{i+1}$, zaś liczba a_{63} jest dzielnikiem liczby $1 + a_1$.

6. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzi równość

$$\sphericalangle DAB + 2\sphericalangle BCD = 180^\circ.$$

Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boków AB i AD odpowiednio w punktach K i L. Wykazać, że okręgi opisane na trójkątach AKL i BCD są styczne.

7. Znaleźć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (m, n), dla których prostokąt o wymiarach $m \times n$ można zbudować z następujących klocków utworzonych z 6 kwadratów jednostkowych: Klocki wolno obracać i odwracać na drugą stronę.



8. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f określone na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość

$$f(x + f(x+y)) = f(x-y) + f(x)^2.$$

III seria

9. Wyznaczyć wszystkie takie liczby całkowite $n \geqslant 1$, że liczba $1 + 2^{n+1} + 4^{n+1}$ jest podzielna przez liczbę $1 + 2^n + 4^n$.

10. Znaleźć wszystkie takie liczby całkowite $n \geqslant 2$, że istnieje zbiór n punktów na płaszczyźnie, z których każdy leży na zewnątrz pewnego koła, zawierającego wszystkie pozostałe punkty i mającego środek w jednym z nich.

11. W ostrosłupie o podstawie ABC i wierzchołku S wysokości AA', BB', CC', SS' przecinają się w jednym punkcie, leżącym wewnątrz ostrosłupa. Punkt O jest środkiem sfery opisanej na danym ostrosłupie. Dowieść, że jeśli prosta SO jest prostopadła do płaszczyzny $A'B'C'$, to ostrosłup $ABCS$ jest prawidłowy.

12. Mając dany skończony ciąg liczb, tworzymy z niego nowy ciąg, wstawiając pomiędzy każdą parę kolejnych wyrazów nowy wyraz, równy ich sumie. Rozpoczynamy od ciągu $(1, 1)$ i wykonujemy wielokrotnie tę operację, otrzymując w pierwszym kroku ciąg $(1, 2, 1)$, w drugim kroku ciąg $(1, 3, 2, 3, 1)$ itd.

Dla każdego $n \geqslant 1$ obliczyć sumę sześcianów wyrazów ciągu otrzymanego w n-tym kroku.