Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z matematyki nr 625, 626

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2011

625. Okręgi o środkach P i Q przecinają się w punktach A i B; promienie PA i QA nie są prostopadłe. Okrąg opisany na trójkącie APQ przecina te dwa okręgi w punktach D i E (różnych od A) oraz przecina prostą AB w punkcie C (różnym od A). Dowieść, że okrąg opisany na trójkącie BDE ma środek w punkcie C.

626. Dana jest liczba $a > 0$. Określamy ciągi (x_n) oraz (y_n):

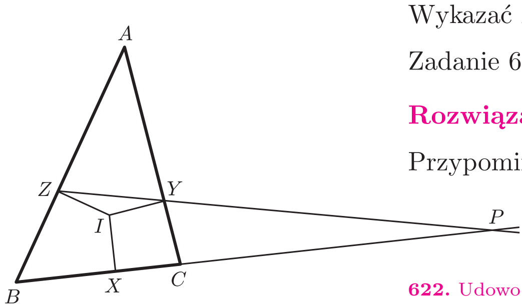
$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \quad \text{dla } n \geqslant 1; \qquad y_n = x_1^{1/2} x_2^{1/4} \ldots x_n^{1/2^n}.$$

Wykazać zbieżność i obliczyć granicę ciągu (y_n).

Zadanie 626 zaproponował pan Jerzy Cisło z Wrocławia.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2011

Przypominamy treść zadań:



621. W nierównoramiennym trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego, stycznego do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach X, Y, Z. Proste BC i YZ przecinają się w punkcie P. Dowieść, że proste IP i AX są prostopadłe.

622. Udowodnić nierówność

$$\frac{x+y}{1+x+y} + \frac{x+z}{1+x+z} \geqslant \frac{x}{1+x} + \frac{y+z}{1+y+z}$$

dla liczb $x, y, z \geqslant 0$.

621. Prosty rachunek na wektorach: styczna do okręgu jest prostopadła do promienia w punkcie styczności, więc $\overrightarrow{IX}\cdot\overrightarrow{XP} = 0$, $\overrightarrow{IY}\cdot\overrightarrow{YA} = 0$. Punkt P leży na prostej YZ, prostopadłej do IA; zatem $\overrightarrow{YP}\cdot\overrightarrow{IA} = 0$.

Chcemy wykazać, że wektory $\overrightarrow{IP}$ i $\overrightarrow{AX}$ są prostopadłe. Obliczamy ich iloczyn skalarny:

$$\overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{IP}\cdot(\overrightarrow{IX} - \overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{IX} - (\overrightarrow{IY} + \overrightarrow{YP})\cdot\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{IX} - \overrightarrow{IY}\cdot\overrightarrow{IA} =$$
$$= (\overrightarrow{IX} + \overrightarrow{XP})\cdot\overrightarrow{IX} - \overrightarrow{IY}\cdot(\overrightarrow{IY} + \overrightarrow{YA}) = |IX|^2 - |IY|^2 = 0.$$

Tak więc $IP \perp AX$.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 613 ($WT = 2{,}66$) i 614 ($WT = 1{,}53$) z numeru 1/2011

Bartłomiej Dyda	Wrocław	41,34
Paweł Najman	Kraków	37,76
Tomasz Tkocz	Rybnik	37,14
Zbigniew Skalik	Wrocław	35,98
Piotr Sobczak	Łódź	34,73
Paweł Kubit	Kraków	32,79

622. Ponieważ $\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$, nierówność dana do udowodnienia jest równoważna następującej:

$$\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x+y} \geqslant \frac{1}{1+x+z} - \frac{1}{1+y+z}.$$

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $y \leqslant z$.

Jeżeli $x \geqslant y$, to w ostatniej nierówności lewa strona jest nieujemna, prawa jest niedodatnia i nie ma czego dowodzić.

Gdy zaś $x < y$, możemy tak przekształcać lewą stronę i szacować ją z dołu, by uzyskać wyrażenie widoczne po prawej stronie:

$$\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x+y} = \frac{y}{(1+x)(1+x+y)} >$$
$$> \frac{y}{(1+x+z)(1+x+y)} > \frac{y}{(1+x+z)(1+z+y)} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{y-x}{(1+x+z)(1+z+y)} = \frac{1}{1+x+z} - \frac{1}{1+z+y}.$$

Rozwiązanie zadania M 1326. Każdemu listowi przypisujemy dwuelementowy zbiór osób, złożony z nadawcy i adresata. Jest $\binom{100}{2} = 50 \cdot 99 = 4950$ takich zbiorów i $100 \cdot 50 = 5000$ wysłanych listów. Ponieważ $5000 > 4950$, więc pewnym dwóm listom przypiszemy ten sam zbiór. Te listy muszą mieć różnych nadawców, więc powstaje sytuacja opisana w treści zadania.