Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Rozwiązania zadań z numeru 4/2011

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

619. Szachownica o rozmiarach $n \times n$ została pokryta płytkami 2×2. Każda płytka pokrywa dokładnie cztery pola. Płytki zachodzą na siebie, ale nie wystają poza brzeg szachownicy. Liczba płytek przekracza $2(n^2 - n)/3$. Dowieść, że można usunąć jedną płytkę tak, by pozostałe płytki nadal pokrywały całą szachownicę.

620. Niech $P(x)$ będzie wielomianem stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej k istnieje liczba całkowita n taka, że liczba $P(n)$ ma co najmniej k różnych dzielników pierwszych.

619. W obrębie szachownicy jest $(n-1)^2$ punktów kratowych (w każdym spotykają się cztery pola szachownicy). Wyróżnijmy te punkty kratowe, na które padły środki płytek. Punkty kratowe leżą w $n-1$ rzędach po $n-1$ punktów; liczba punktów wyróżnionych przekracza $(n-1)(2n/3)$, więc w pewnym rzędzie jest ich więcej niż $\lfloor 2n/3 \rfloor$.

Numerujemy punkty kratowe w tym rzędzie od 1 do $n-1$. Wystarczy wykazać, że pewna trójka $(j, j+1, j+2)$ składa się z punktów wyróżnionych; można wtedy bezkarnie usunąć płytkę o środku w punkcie $j+1$.

Załóżmy, że tak nie jest; zatem w każdej z trójek $(1,2,3)$, $(4,5,6)$ itd. jest punkt niewyróżniony. Jest $\lfloor (n-1)/3 \rfloor$ trójek postaci $(3i-2, 3i-1, 3i)$. W takim razie liczba punktów wyróżnionych (w rozważanym rzędzie) nie przekracza różnicy $(n-1) - \lfloor (n-1)/3 \rfloor$; zaś ta różnica równa się $\lfloor 2n/3 \rfloor$, o czym można się przekonać, rozpatrując trzy możliwe reszty z dzielenia n przez 3. Sprzeczność – wyróżnionych punktów miało być w tym rzędzie więcej.

620. Niech $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$ $(m \geqslant 1)$.

Gdy $a_0 = 0$, wystarczy wziąć dowolną liczbę n, będącą iloczynem k różnych liczb pierwszych. Są one oczywiście dzielnikami liczby $P(n)$. Dalej przyjmijmy, że $a_0 \neq 0$.

Najpierw wykażemy, że zbiór dzielników pierwszych *wszystkich* liczb $P(n)$ jest nieskończony. Przypuśćmy bowiem, że jest to zbiór skończony $\{p_1, \ldots, p_s\}$. Biorąc jako n dowolną liczbę postaci $n = a_0 l p_1 \ldots p_s$ (l całkowite), mamy

$$P(n) = a_0 \Big[1 + \sum_{i=1}^{m} a_i a_0^{i-1} (l p_1 \ldots p_s)^i \Big].$$

Liczba w nawiasie kwadratowym nie dzieli się przez żadną z liczb pierwszych $p_1, \ldots, p_s$ (a swoboda wyboru l pozwala przyjąć, że jest różna od ± 1); ma więc jakiś inny dzielnik pierwszy, wbrew uczynionemu przypuszczeniu.

Stąd wniosek, że dla dowolnego k istnieją różne liczby pierwsze $q_1, \ldots, q_k$ oraz takie liczby całkowite $n_1, \ldots, n_k$, że

$$P(n_i) \equiv 0 \pmod{q_i} \quad \text{dla } i = 1, \ldots, k.$$

Znajdujemy liczbę n, spełniającą układ kongruencji

$$n \equiv n_i \pmod{q_i} \quad \text{dla } i = 1, \ldots, k;$$

taka liczba istnieje, w myśl chińskiego twierdzenia o resztach. Wówczas

$$P(n) \equiv P(n_i) \equiv 0 \pmod{q_i} \quad \text{dla } i = 1, \ldots, k;$$

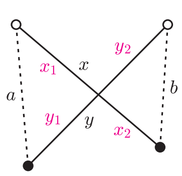
liczba $P(n)$ ma więc co najmniej k różnych dzielników pierwszych.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 611 ($WT = 2{,}65$) i 612 ($WT = 2{,}33$) z numeru 12/2010

Michał Kieza	Warszawa	47,30
Bartłomiej Dyda	Wrocław	41,03
Zbigniew Skalik	Wrocław	34,60
Paweł Najman	Kraków	33,57
Piotr Sobczak	Łódź	33,20
Tomasz Tkocz	Rybnik	32,95

Michał Kieza – już po raz czwarty.

Rozwiązanie zadania M 1322.
Zbiór n odcinków o różnokolorowych końcach możemy skonstruować na skończenie wiele sposobów (dokładnie $n!$). Narysujmy go tak, aby suma długości narysowanych odcinków była możliwie najmniejsza. Wtedy te odcinki są parami rozłączne, bo w przeciwnym przypadku



parę x, y przecinających się odcinków można zastąpić parą odcinków nieprzecinających się a, b, zmniejszając jednocześnie sumę długości wszystkich odcinków. Wynika to łatwo z nierówności trójkąta: $|a| + |b| > (|x_1| + |y_1|) + (|x_2| + |y_2|) = |x| + |y|$.