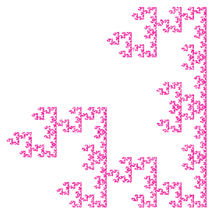
Klub 44



Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 609 ($WT = 1{,}20$) i 610 ($WT = 3{,}03$) z numeru 11/2010

Jerzy Cisło	Wrocław	44,58
Michał Kieza	Warszawa	42,85
Bartłomiej Dyda	Wrocław	41,03

W Klubie 44 M twarz doskonale znana: Jerzy Cisło – już ósmy raz!

Rozwiązania zadań z numeru 3/2011

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

617. Znaleźć wszystkie funkcje F, określone na zbiorze wszystkich liczb całkowitych dodatnich, o wartościach rzeczywistych, spełniające równanie $F(3m+2n) = F(m)F(n)$ dla każdej pary liczb całkowitych $m, n \geqslant 1$.

618. Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym środek odcinka AD jest jednakowo odległy od punktów P i C, a środek odcinka CD jest jednakowo odległy od punktów P i A. Punkt Q jest środkiem odcinka BP. Wykazać, że $|\sphericalangle PAQ| = |\sphericalangle PCQ|$.

617. Niech F będzie jedną z szukanych funkcji. Oznaczmy wartości $F(1), \ldots, F(6)$ kolejno przez a, b, c, d, e, f; oznaczmy ponadto $F(8) = h$, $F(10) = j$. Kładąc w równaniu $m = n = 1$ oraz $m = n = 2$, dostajemy

(1) $$e = a^2, \qquad j = b^2.$$

Każda czwórka $(m, n; m', n')$, w której $3m + 2n = 3m' + 2n'$, daje informację w postaci równości $F(m)F(n) = F(m')F(n')$.

Biorąc czwórki $(3,2;1,5)$, $(5,1;3,4)$, $(3,1;1,4)$, $(4,1;2,4)$, $(3,3;1,6)$, otrzymujemy w ten sposób związki

(2) $$bc = ae = cd, \qquad ac = ad = bd, \qquad c^2 = af.$$

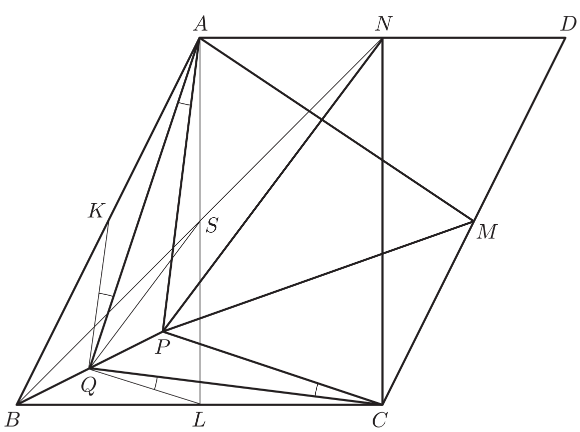
Natomiast czwórki $(3,3;1,6)$, $(6,1;4,4)$, $(6,6;8,3)$, $(2,10;8,1)$ dają zależności

(3) $$c^2 = af = d^2, \qquad f^2 = ch, \qquad bj = ah.$$

Jeżeli $a \neq 0$, to z pierwszej równości (1) oraz ze związków (2) wnosimy kolejno, że $e \neq 0$; $b, c, d \neq 0$; $b = d$; $c = d$; $a = b$; $c = e$; $f = c^2/a$. Tak więc $a = b = c = d = e = f$; skoro zaś $e = a^2$, ta wspólna wartość wynosi 1.

Jeżeli natomiast $a = 0$, to korzystamy z zależności (3) oraz (1) i łatwo stwierdzamy, że $c = d = f = 0$; $e = 0$; $b = 0$.

Zatem na zbiorze $\{1,2,3,4,5,6\}$ funkcja F jest stała, o wartości 1 lub 0. Każda liczba naturalna $x > 6$ daje się zapisać w postaci $3m + 2n$ dla pewnych $m, n < x$. Przez oczywistą indukcję uzyskujemy wniosek, że F jest funkcją tożsamościowo równą 1 lub 0. Każda z nich spełnia zadane równanie.



618. Oznaczmy środki boków AB, BC, CD, DA odpowiednio przez K, L, M, N. W myśl założenia, $|MP| = |MA|$, $|NP| = |NC|$. Niech S będzie wspólnym środkiem przekątnych AL i BN równoległoboku $ABLN$. Odcinek SQ łączy środki dwóch boków trójkąta NBP, więc

$$|SQ| = \frac{1}{2}|NP| = \frac{1}{2}|NC| = |SL| = |SA|.$$

Zatem punkt Q leży na okręgu o średnicy AL, wobec czego kąt AQL jest prosty. Analogicznie, kąt CQK jest prosty. Stąd wynika, że $|\sphericalangle AQK| = |\sphericalangle CQL|$.

Punkty K, Q są środkami dwóch boków trójkąta ABP, więc $KQ \parallel AP$. Analogicznie, $LQ \parallel CP$. Stąd, ostatecznie,

$$|\sphericalangle PAQ| = |\sphericalangle AQK| = |\sphericalangle CQL| = |\sphericalangle PCQ|.$$